

# **Leistungskenngrößen für Gesamtfahrstraßenknoten**

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Nils Nießen**

aus Aachen

Berichter:   Universitätsprofessor Dr.-Ing Ekkehard Wendler  
              Universitätsprofessor Dr.rer.nat. habil. Hans-Jürgen Sebastian

Tag der mündlichen Prüfung: 08.05.2008

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Elemente eines Eisenbahnnetzes .....</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Warteschlangenmodelle .....</b>	<b>17</b>
<b>3.1</b>	<b>Bedienungssystem und KENDALL-Symbolik.....</b>	<b>18</b>
3.1.1	Ankunftsprozess im Trassenmanagement .....	19
3.1.2	Bedienungsprozess.....	21
3.1.3	Bedienungsstellen und Warteraum .....	25
3.1.4	Bediensysteme in der Eisenbahnbetriebswissenschaft.....	26
<b>3.2</b>	<b>Kenngößen .....</b>	<b>28</b>
3.2.1	Leistungskenngrößen.....	28
3.2.2	Qualitätskenngrößen.....	30
<b>4</b>	<b>Leistungskenngrößen für Gesamtfahrstraßenknoten - Stand der Forschung .....</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Verkettung von Zugfahrten .....</b>	<b>32</b>
4.1.1	Verkettung einer Eisenbahnstrecke nach ADLER.....	32
4.1.2	Verkettung eines Gesamtfahrstraßenknotens nach POTTHOFF .....	34
4.1.3	Berechnung der Wartezeiten mit Hilfe der Verkettungszahl.....	37
4.1.4	Referenzstromansatz .....	39
<b>4.2</b>	<b>Simulationen.....</b>	<b>41</b>
<b>4.3</b>	<b>Mathematische Modelle .....</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Gesamtfahrstraßenknoten als <i>multiresource queue</i>.....</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>Bestimmung der theoretischen Leistungsfähigkeit .....</b>	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>Berechnung der planmäßigen Wartezeiten.....</b>	<b>53</b>
7.1	Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten .....	53

7.1.1	Verfahren nach DZIONG und ROBERTS .....	53
7.1.2	Verfahren nach PINSKY und CONWAY .....	54
7.1.3	Zerlegung des Systems in Teilsysteme.....	56
<b>7.2</b>	<b>Bestimmung der Wartewahrscheinlichkeiten.....</b>	<b>62</b>
<b>7.3</b>	<b>Bestimmung der planmäßigen Wartezeiten.....</b>	<b>62</b>
<b>7.4</b>	<b>Komplexität.....</b>	<b>65</b>
<b>8</b>	<b>Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten .....</b>	<b>68</b>
<b>8.1</b>	<b>Wartezeiten ersten Grades .....</b>	<b>72</b>
<b>8.2</b>	<b>Wartezeiten höheren Grades.....</b>	<b>75</b>
<b>8.3</b>	<b>Erwartungswert der außerplanmäßigen Wartezeit.....</b>	<b>78</b>
<b>9</b>	<b>Wartezeiten je Netzelement und Rangstufe .....</b>	<b>79</b>
<b>9.1</b>	<b>Subtraktion der Streckenwartezeiten .....</b>	<b>79</b>
9.1.1	Subtraktion der planmäßigen Streckenwartezeiten.....	80
9.1.2	Subtraktion der außerplanmäßigen Streckenwartezeiten .....	82
<b>9.2</b>	<b>Ermittlung der Wartezeiten für jede Rangstufe .....</b>	<b>84</b>
<b>10</b>	<b>Rechenbeispiele.....</b>	<b>85</b>
<b>10.1</b>	<b>Simulationsprogramm .....</b>	<b>85</b>
<b>10.2</b>	<b>Berechnung der theoretischen Leistungsfähigkeit.....</b>	<b>88</b>
<b>10.3</b>	<b>Berechnung der Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten.....</b>	<b>91</b>
<b>10.4</b>	<b>Zerlegung eines Systems in drei Teilsysteme.....</b>	<b>92</b>
<b>10.5</b>	<b>Berechnung der Wartezeiten.....</b>	<b>99</b>
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung und offene Fragen .....</b>	<b>102</b>
<b>12</b>	<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen .....</b>	<b>104</b>
<b>13</b>	<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>109</b>

---

<b>14</b>	<b>Tabellenverzeichnis.....</b>	<b>111</b>
<b>15</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>112</b>
<b>Anhang</b>	<b>.....</b>	<b>117</b>

## Leistungskenngrößen für Gesamtfahrstraßenknoten

### - Zusammenfassung -

Das Eisenbahnnetz besteht aus den Infrastrukturelementen Strecken, Gleisgruppen und Gesamtfahrstraßenknoten. Als Gesamtfahrstraßenknoten werden die Weichenzonen in den Bahnhofsköpfen bezeichnet. Durch die in den Gesamtfahrstraßenknoten angelegten Fahrwege ergeben sich die möglichen Verknüpfungen zwischen den an einen Knoten angrenzenden Strecken. Dabei ist es möglich, dass in einem Gesamtfahrstraßenknoten zeitgleich mehrere Zugfahrten durchgeführt werden, wenn sich diese nicht gegenseitig behindern.

Während für Eisenbahnstrecken und Gleisgruppen analytische Verfahren zur Bestimmung von Leistungskenngrößen verfügbar sind, liegen für Gesamtfahrstraßenknoten hingegen nur Lösungsansätze vor. In der vorliegenden Arbeit werden Vorgehensweisen hergeleitet, mit den sich für einen Gesamtfahrstraßenknoten die Kenngrößen

- Grenzleistung
- Verlustwahrscheinlichkeit
- Wartewahrscheinlichkeit
- planmäßige Wartezeiten
- und außerplanmäßige Wartezeiten

bestimmen lassen. Als besonders hilfreich hat sich hierzu der Ansatz erwiesen, das Modell einer *multiresource queue* aus der Bedientheorie zur Modellierung eines Gesamtfahrstraßenknotens zu verwenden.

Aufgrund der Mehrkanaligkeits-Eigenschaft des Bediensystems Gesamtfahrstraßenknoten können zwei oder auch mehrere Zugfahrten zeitgleich stattfinden. Damit die theoretische Leistungsfähigkeit der Anlage – die so genannte Grenzleistung – erreicht wird, müssen die Zugfahrten zeitlich optimal angeordnet werden. So ist es aus Gründen der Leistungsmaximierung notwendig, parallele Zugfahrten zu bündeln, statt diese nacheinander abzufahren. In dieser Arbeit wird ein mathematischer Ansatz vorgestellt, der es ermöglicht, die Grenzleistung eines Gesamtfahrstraßenknotens mit Hilfe einer linearen Optimierung zu ermitteln.

Zur Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeiten werden für zwei unterschiedliche Verfahren Formeln aufgezeigt. Da bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten für Gesamtfahrstraßenknoten die Komplexität sehr schnell ansteigt, wird außerdem ein Algorithmus erläutert, der das Gesamtsystem in mehrere Teilsysteme zerlegt. Diese

Teilsysteme können so zunächst einzeln berechnet werden. Anschließend liefert ein Zusammenfügen die exakten Ergebnisse für das Gesamtsystem. Zur Abschätzung der Wartewahrscheinlichkeiten werden dann – ebenso wie bei POTTHOFF für Gleisgruppen - die Verlustwahrscheinlichkeiten verwendet.

Bei der Berechnung der Wartezeiten wird zwischen den plan- und außerplanmäßigen Wartezeiten unterschieden. Die planmäßigen Wartezeiten sind die bei der Fahrplan-konstruktion entstehenden Wartezeiten, wenn ein Zug von seiner ursprünglichen Wunschlage im Fahrplan abweichen muss, um Konflikte mit anderen Zügen zu vermeiden.

Die außerplanmäßigen Wartezeiten sind die Wartezeiten, die im Betriebsablauf aufgrund von Folgeverspätungen entstehen. Bei einem vollständig pünktlichen Betrieb würden daher keine außerplanmäßigen Wartezeiten auftreten.

In der vorliegenden Arbeit werden die planmäßigen Wartezeiten an einem Gesamtfahrstraßenknoten mit Hilfe eines modifizierten Verlust- / Wartesystems ermittelt. Eine Erweiterung der STRELE Formel nach SCHWANHÄUßER ermöglicht die Berechnung der außerplanmäßigen Wartezeiten für Gesamtfahrstraßenknoten.

Die Arbeit enthält zusätzlich einige Rechenbeispiele, die die Funktionsweise der beschriebenen Modelle erläutern.

## Capacity characteristics for route nodes

### - Summary -

The railway network consists of the infrastructure elements lines, station track groups and route nodes. Route nodes contain the switch zones in the front end of stations. The track layout of a route node connects the lines and the station tracks. Thereby train runs can be operated simultaneously, if these don't exclude each other.

Basically a railway network consists of the infrastructure elements lines, station track groups and route nodes. Route nodes contain the switch zones in the front end of stations, linking the adjacent lines and the station tracks. Thereby train runs can be operated simultaneously, if these do not exclude each other.

Analytical methods for capacity assessment are available for lines and station track groups, but for route nodes only some rudimental approaches exist. In this paper different methods will be deduced to compute the capacity characteristics

- theoretical capacity
- loss probability
- waiting probability
- scheduled waiting time and
- unscheduled waiting time

for a route node. The new approach uses a multiresource queue from queuing theory to model a route node. Because of the multi-channel feature of a route node two or even more train runs can be operated simultaneously. To achieve the theoretical capacity of the system, train runs have to be arranged optimally. To maximise the capacity it is necessary to bundle parallel train runs instead of operating them sequentially. In this publication a mathematical approach will be presented to calculate the theoretical capacity by means of linear optimisation.

To determine the loss probability two different formulas are presented. Generally the complexity of the computation increases rapidly with the size of the route node. To cope with this problem an algorithm is described, which divides the system in several subsystems. These subsystems can be handled separately. Merging the results finally provides an exact result for the overall system. To estimate the waiting probability the loss probability is used in first instance. This is the same approximation POTTHOFF used to determine the loss probabilities of station track groups.



In railway operation research scheduled and unscheduled waiting times are differentiated. While scheduled waiting times occur during the process of timetable construction, whenever a train run has to leave his designated slot to avoid a conflict with another train run. Unscheduled waiting times result from knock-on delays during operation. If there is a completely undisturbed operation, unscheduled waiting times will not arise.

In these publication the unscheduled waiting times occurring in a route node are deduced by application of a modified loss- / waiting system. Furthermore an enhancement of the STRELE formula by SCHWANHÄÜßER allows the calculation of scheduled waiting times of route nodes.

Additionally this paper contains various sample calculations to illustrate the principles of the described methods.

## Paramètres dimensionnants dans les zones d'accès aux gares

### - Résumé -

Un réseau de chemin de fer est composé d'éléments d'infrastructure tels que les sections, les groupes de voies ou encore les zones d'accès aux nœuds. Ces zones d'accès aux nœuds étant les zones d'aiguillages dans les têtes de gares. Elles proposent un certain nombre d'itinéraires qui relient le nœud (la gare) aux sections qui lui sont adjacentes. Il est donc tout à fait normal que plusieurs trains empruntent simultanément une zone d'accès lorsque leurs itinéraires ne sont pas incompatibles.

S'il existe des méthodes efficaces afin d'évaluer la performance d'une section ou d'un groupe de voies à travers une approche analytique, il n'existe au contraire peu ou pas de solutions pour les zones d'accès aux gares. Le présent travail propose les marches à suivre pour déterminer les paramètres dimensionnants dans les zones d'accès. Ces paramètres sont :

- les limites de performance (de capacité)
- les probabilités de perte de temps
- les probabilités d'attente
- les temps d'attente planifiés
- les temps d'attente non planifiés

Pour ce faire, un algorithme de multiresource queue s'est avéré très utile afin de modéliser un système d'utilisation théorique des itinéraires dans les zones d'accès aux gares.

Selon un principe de multiplicité des sillons disponibles dans ce système d'utilisation des itinéraires, deux à trois trains peuvent circuler simultanément dans la zone d'accès à une gare. Dans le but d'optimiser la performance et donc la capacité d'une telle zone, les circulations doivent être parfaitement ordonnancées. En conséquence, afin de maximiser la performance du système, les circulations en parallèle doivent être privilégiées. L'étude s'appuie sur une approche mathématique d'optimisation linéaire qui vise à atteindre les limites de capacité d'une telle zone d'accès.

Afin de déterminer les probabilités de perte de temps, deux méthodes différentes sont utilisées. Étant donné que la complexité d'un tel problème croît très vite, l'algorithme employé se base sur une subdivision du système global en sous-systèmes. Ces sous-systèmes sont considérés séparément puis rassemblés afin de livrer un résultat pour le système global. De la même manière que pour les groupes de voies chez POTTHOFF,

la détermination des probabilités d'attente sera déterminée à l'aide du principe des probabilités de perte de temps.

Une distinction est faite entre les temps d'attente planifiés et non planifiés. Les temps planifiés sont préétablis lors de l'élaboration de l'horaire de manière à ce qu'un train évite les conflits avec d'autres trains lorsqu'il va devoir s'écarter de son sillon de base.

Les temps d'attente non planifiés sont les attentes qui émanent des retards dus à l'exploitation. Dans le cas d'une exploitation ponctuelle, aucun temps d'attente non planifié ne peut apparaître.

Le présent travail propose une démarche qui utilise un système modifié des pertes et des attentes pour calculer les temps d'attentes planifiés dans les zones d'accès aux nœuds. Une extension de la formule de STRELE selon SCHWANHÄUSSER permet de calculer les temps d'attentes non planifiés pour les zones d'accès.

Enfin, des exemples de calcul ont été menés afin d'illustrer le mode de fonctionnement du modèle par des cas concrets.

# 1 Einleitung

Für einen wirtschaftlichen Betrieb der Eisenbahn ist eine angemessene Dimensionierung der Infrastruktur eine wichtige Voraussetzung. Alle wesentlichen Neubau- oder Ausbaumaßnahmen im Eisenbahnnetz erfordern lange Planungszeiträume und hohe Investitionskosten. Da die Anlagen eine lange Lebensdauer aufweisen, müssen diese auch künftigen Anforderungen genügen. Daher ist jede infrastrukturelle Maßnahme auf ihre Wirksamkeit und Nachhaltigkeit zu überprüfen. Besonders für die mittel- und langfristige Planung kommen zur Validierung von Ausbau- oder Neubauvarianten analytische Modelle der Eisenbahnbetriebswissenschaft zur Anwendung [34].

In den letzten Jahren hat sich bei der Analyse der bestehenden Infrastruktur herausgestellt, dass die Knoten die eigentlichen Engpässe des Netzes darstellen [55]. Selbst der Bundesrechnungshof stellt in seinen Bemerkungen zur Haushalts- und Wirtschaftsführung des Bundes fest, dass eine Engpassbeseitigung in Eisenbahnknoten sinnvoller erscheine, als kostenintensive Investitionen in Neubaustrecken [7].

Die Vernachlässigung der Knoten kann unter anderem mit den zur Verfügung stehenden Modellen begründet werden, die vor einigen Jahren im Bereich der strategischen Netzplanung zum Einsatz kamen. So wurden erstmals in den 80er Jahren EDV-basierte Bemessungswerkzeuge für Eisenbahnstrecken eingesetzt. In den Netzmodellen wurden den Eisenbahnknoten jedoch zunächst eine unendliche Leistungsfähigkeit unterstellt [5]. Dies hatte pragmatische Gründe: da die Knoten im Vergleich zu den Strecken in der Regel komplexer – und damit auch schwieriger - zu modellieren sind, wurden die Knoten zunächst außen vorgelassen.

Erst im Laufe der folgenden Jahre wurden die eisenbahnbetriebswissenschaftlichen Verfahren mit dem Ziel weiterentwickelt, auch Knoten zu berücksichtigen. Mittlerweile wird das Leistungsverhalten von Knoten in den strategischen Modellen (Bundesverkehrswegeplan, Strategie Netz 21 der Deutschen Bahn) ansatzweise berücksichtigt [8], [43]. Besonders schwierig gestaltet sich dabei die Analyse der Weichenzonen der Bahnhofsköpfe, der sogenannten Gesamtfahrstraßenknoten.

In der vorliegenden Arbeit werden analytische Verfahren aufgezeigt, mit deren Hilfe das Leistungsverhalten von Gesamtfahrstraßenknoten beschrieben werden kann. In Abschnitt 2 wird zunächst allgemein ein Eisenbahnnetz analysiert und in seine makroskopischen Teilelemente aufgeteilt. Die Teilelemente werden dann mit Hilfe der Warteschlangentheorie, deren Grundlagen in Abschnitt 3 aufgezeigt werden, analysiert. Wich-

tige Kenngrößen stellen hierbei neben der Leistungsfähigkeit die plan- und außerplanmäßigen Wartezeiten dar.

In Abschnitt 4 werden die bisherigen Verfahren zur Analyse von Gesamtfahrstraßenknoten betrachtet. Hauptsächlich handelt es sich dabei um Verkettungsansätze. Außerdem werden verschiedene mathematische Modelle untersucht. Dabei stellt sich der Ansatz, einen Gesamtfahrstraßenknoten als sogenannte *multiresource queue* zu modellieren, als geeignet dar.

Nach der formalen Beschreibung eines Gesamtfahrstraßenknotens als *multiresource queue* im fünften Abschnitt werden in Abschnitt 6 die Formeln zur Ermittlung der theoretischen Leistungsfähigkeit hergeleitet. Die Berechnung der Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten sowie der planmäßigen Wartezeiten erfolgt in Abschnitt 7. Im achten Abschnitt werden dann aufbauend auf der STRELE-Formel nach SCHWANHÄUßER [44] die außerplanmäßigen Wartezeiten, die an einem Gesamtfahrstraßenknoten entstehen, bestimmt. In Abschnitt 9 wird die Zusage der Wartezeiten erläutert.

Schließlich enthält Abschnitt 10 verschiedene Rechenbeispiele, mit deren Hilfe die beschriebenen Formeln angewendet und mit den Ergebnissen der bereits bestehenden Verfahren verglichen werden.

## 2 Elemente eines Eisenbahnnetzes

Ein Eisenbahnnetz kann als ein Kanten-Knoten-Modell betrachtet werden. Die Strecken entsprechen dabei den Kanten; die Knoten sind die Verknüpfungspunkte, die den Übergang von einer Strecke auf eine andere ermöglichen. Ein Eisenbahnnetz kann unter verschiedenen Gesichtspunkten aufgeteilt werden. So kann beispielsweise eine rechtliche Unterscheidung nach Haupt- oder Nebenstrecken oder eine technische Unterteilung z. B. nach Elektrifizierung vorgenommen werden.

Abb. 1 gibt einen Überblick über die wichtigsten Strecken und Knoten des deutschen Eisenbahnnetzes [57].



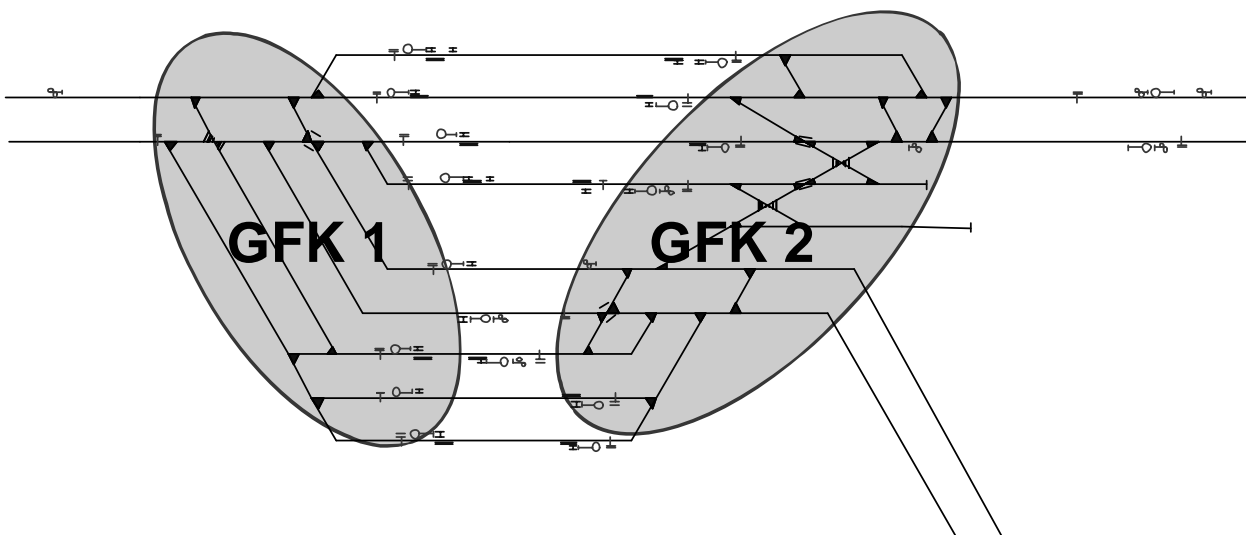
**Abb. 1: Übersicht des deutschen Eisenbahnnetzes**

Die Eisenbahnbetriebswissenschaft soll Aussagen über die Güte und Qualität eines Eisenbahnnetzes und dessen Teilbereiche treffen. Die Teilelemente eines Eisenbahnnetzes sind zunächst die Strecken und Knoten, wobei die Knoten wiederum aus den so genannten Gesamtfahrstraßenknoten (GFK) und einer Gleisgruppe (GG) bestehen [57].

Die Aufgabe des Infrastrukturelements Knoten ist die Verknüpfung von Eisenbahnstrecken. Knoten können entweder Bahnhöfe oder Abzweigstellen sein.

Die eigentliche Verknüpfung der Streckengleise erfolgt in den so genannten Gesamtfahrstraßenknoten. Als Gesamtfahrstraßenknoten werden die Weichenzonen in den Bahnhofsköpfen bezeichnet. Durch die in den Gesamtfahrstraßenknoten angelegten Fahrwege ergeben sich die möglichen Verknüpfungen zwischen den an einen Knoten angrenzenden Strecken.

In Abb. 2 ist der Aachener Hauptbahnhof als Systemskizze dargestellt. Dieser Bahnhof repräsentiert einen Standardknoten mit einer Gleisgruppe und zwei Gesamtfahrstraßenknoten. Die Weichenzonen in den beiden Bahnhofsköpfen, die Gesamtfahrstraßenknoten, sind in der Abbildung hervorgehoben.

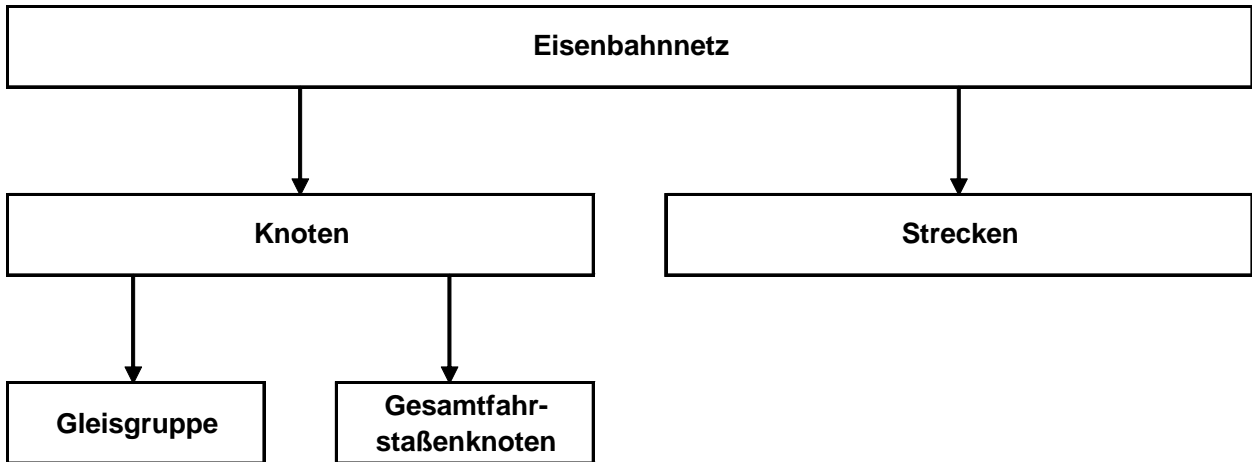


**Abb. 2: Gesamtfahrstraßenknoten Aachen Hbf**

Zwischen den Gesamtfahrstraßenknoten eines Bahnhofs befinden sich die Gleisgruppen. Aus bedienungstheoretischer Sicht bilden die Gleisgruppen den Warteraum im Eisenbahnnetz. In den Gleisgruppen steht eine gewisse Anzahl von Gleisen zu Verfügung, in denen auf das Freisein des nächsten Streckenabschnitts oder auf Überholungen gewartet werden kann.

Als Spezialfälle gibt es auch Knoten mit nur einem Gesamtfahrstraßenknoten und einer Gleisgruppe (Kopfbahnhof) oder mit nur einem Gesamtfahrstraßenknoten, aber ohne Gleisgruppe (Abzweigstelle).

Abb. 3 zeigt die Aufteilung eines Eisenbahnnetzes in die verschiedenen Infrastrukturelemente.



**Abb. 3: Aufteilung eines Eisenbahnnetzes**

Eisenbahnstrecken können nach verschiedenen Kriterien unterschieden werden. In der Eisenbahnbetriebswissenschaft ist eine Einteilung nach Streckenkategorien, wie sie von der DB Netz AG angewandt wird, sinnvoll [10]. BENDFELDT [4] untersuchte, ob eine solche Einteilung auch für Eisenbahnknoten möglich ist. Aufgrund der Vielfältigkeit von Knotentypen ist jedoch eine Reduktion auf Knotenstandards nicht zielführend. Stattdessen schlägt BENDFELDT für die Planung von Eisenbahnknoten die Verwendung von standardisierbaren Bausteinen vor, aus denen sich der Gesamtknoten dann zusammensetzen lässt.



### 3 Warteschlangenmodelle

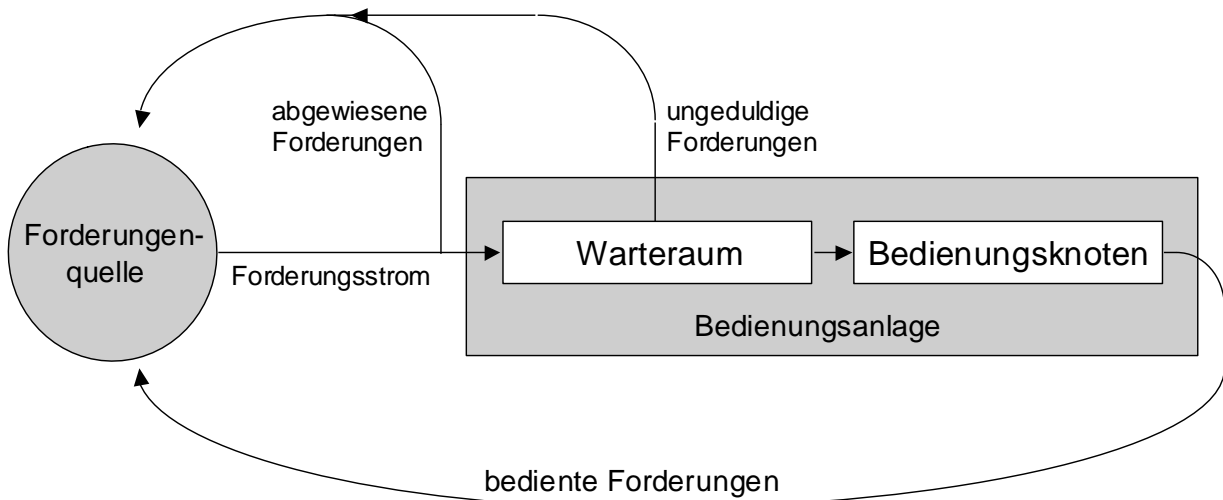
Ein Ziel der Eisenbahnbetriebswissenschaft ist die Dimensionierung der Gleisanlagen. Bei kurzfristigen Planungshorizonten steht der Fahrplan bereits fest oder ist in seinen Grundzügen bekannt. Dort können eine Fahrplankonstruktion [49] oder eine Simulation [53] Aussagen über die Leistungsfähigkeit liefern.

Für die mittel- und langfristigen Planungen, bei denen in der Regel noch kein Fahrplan bekannt ist, werden oftmals analytische Verfahren eingesetzt [16]. Den Kern dieser Verfahren bilden Warteschlangenmodelle aus der Bedientheorie. In der Warteschlangentheorie verursacht das Aufeinandertreffen von zwei Forderungen an einem Bedienkanal Stauerscheinungen. Als Kenngrößen werden die mittlere Wartezeit oder die Wartewahrscheinlichkeit der Forderungen bestimmt. Warteschlangenmodelle werden zur Modellierung des Zustands der Fahrplankonstruktion und des Betriebszustandes eingesetzt. Die Wartezeiten, die bei der Fahrplankonstruktion entstehen, werden als planmäßige Wartezeiten bezeichnet, die Wartezeiten, die sich im Betrieb aufgrund von Verspätungen ereignen, als außerplanmäßige Wartezeiten.

Ein Vorteil dieser analytischen Verfahren ist, dass sie fahrplanunabhängig angewandt werden können. D. h. im Unterschied zu einer Fahrplankonstruktion oder einer Simulation können diese Verfahren ohne einen konkreten Fahrplan arbeiten. Besonders für langfristige Planungshorizonte kennt der Infrastrukturbetreiber noch keine Fahrpläne, sondern nur prognostizierte Zugzahlen. Würde nun hier für die Dimensionierung ein konkreter Fahrplan hinterlegt, bestünde die Gefahr, dass die Infrastruktur für diesen Fahrplan zwar optimiert wäre, später aber ein ganz anderer Fahrplan realisiert wird und die Infrastruktur dann nicht mehr den Anforderungen genügt. Durch die analytischen Modelle der Warteschlangentheorie wird kein spezieller Fahrplan, sondern vielmehr die Menge aller erdenklichen Fahrpläne berücksichtigt. Aufgrund dieser fahrplanunabhängigkeit werden die analytischen Modelle auch in der strategischen Netzplanung eingesetzt [57].

### 3.1 Bedienungssystem und KENDALL-Symbolik

Ein Bedienungssystem besteht aus einer Bedienungsanlage, auf die ein Forderungsstrom trifft. Die Bedienungsanlage setzt sich aus einem Bedienungsknoten und einem Warteraum zusammen. In dem Bedienungsknoten sind ein oder mehrere Bedienkanäle vorhanden, die für die Abfertigung einer Forderung eine bestimmte Zeit brauchen. Können ankommende Forderungen nicht sofort bedient werden, da der Bedienungsknoten belegt ist, so müssen diese im Warteraum auf ihre Bedienung warten. Dabei kann es möglich sein, dass ungeduldige Forderungen den Warteraum nach einiger Zeit wieder „unbedient“ verlassen. Wenn der Warteraum besetzt ist, werden ankommende Forderungen abgewiesen. Ist kein Warteraum vorhanden, so handelt es sich hierbei um ein Verlustsystem. Abb. 4 zeigt die Struktur eines Bedienungssystems.



**Abb. 4: Prinzipielle Struktur eines Bedienungssystems**

Ein Warteschlangenmodell besteht somit grundsätzlich aus den vier Modellelementen Bedienungsknoten, Warteraum, Forderungsstrom und dem Bedienungsprozess. Die Beschreibung eines solchen Modells erfolgt anhand der KENDALL-Symbolik mit folgender Notation:

$$A/B/s/m \quad (3-1)$$

A ... Ankunftsprozess

B ... Bedienungsprozess

s ... Anzahl der parallelen Bedienkanäle

m ... Anzahl der Warteplätze im Warteraum vor der Bedienungsstelle

Dabei werden der Ankunftsprozess durch die statistische Verteilung der Zwischenankunftszeitpunkte und der Bedienungsprozess durch die statistische Verteilung der Bedienzeiten angegeben.

Für die Verteilungsprozesse von A und B werden für einige Prozesstypen Kurzbezeichnungen verwendet:

M ... MARKOV-Prozess: die zugrundeliegende Zufallsgröße ist exponentialverteilt.

$E_k$  ... ERLANG- $k$ -Prozess: die zugrundeliegende Zufallsgröße ist Erlang- $k$ -verteilt.

D ... DIRAC-Prozess: konstante Zeiten (Einpunktverteilung).

GI ... General-Independent-Prozess: dieser Prozess stellt keinerlei Anforderungen an die Verteilung der Zufallsgröße, es darf jedoch keine Abhängigkeiten innerhalb des Prozesses und zu anderen Prozessen bestehen.

### 3.1.1 Ankunftsprozess im Trassenmanagement

Das Trassenmanagement umfasst die Planungsschritte der Fahrplankonstruktion, die letztendlich zu der Realisierung eines Fahrplans führen. Einige Monate vor Veröffentlichung des Fahrplans müssen die Eisenbahnverkehrsunternehmen zunächst die sogenannte Trassenanmeldung durchführen. Bei der Trassenanmeldung werden dem Infrastrukturbetreiber die einzelnen Zugfahrten mit ihren Laufwegen und zeitlichen Wunschlagen mitgeteilt.

Danach erstellt der Eisenbahninfrastrukturbetreiber ausgehend von den Trassenwünschen einen ersten Fahrplan. Hierbei kommt es zu Konflikten, falls mehrere Zugfahrten die gleichen Infrastrukturelemente zur selben Zeit beanspruchen. Damit ein Fahrplan fahrbar wird, müssen sämtliche Konflikte gelöst werden. Zunächst wird meistens eine einvernehmliche Lösung zwischen den beteiligten Verkehrsunternehmen angestrebt. Falls dies nicht zum Ziel führt, erfolgt – je nach Netzbetreiber bzw. rechtlichen Vorgaben – die Konfliktlösung nach unterschiedlichen Regeln. Wenn alle Konflikte beseitigt sind, können dann für diesen Fahrplan die benötigten Fahrplanunterlagen erstellt werden.

Beim Prozess der Fahrplanerstellung entstehen planmäßige Wartezeiten, wenn Zugtrassen von ihrer zeitlichen Wunschlage abweichen. Eine zeitliche Abweichung von der Wunschlage entsteht z. B. bei einer Haltezeit- oder Fahrzeitverlängerung. Auch das komplette Verschieben einer Trasse entspricht einer planmäßigen Wartezeit, obwohl dies zu keiner Beförderungszeitverlängerung führt.

Bei der analytischen Berechnung der planmäßigen Wartezeiten mit Hilfe eines Warteschlangenmodells entsprechen die bestellten Wunschabfahrtszeiten den Ankunftszeiten der Forderung an der betrachteten Bedienstelle.

Der Ankunftsprozess des Forderungsstroms wird durch den mittleren Ankunftsabstand  $\bar{t}_a$  und den Variationskoeffizienten der Ankunftsabstände VA beschrieben. Der mittlere Ankunftsabstand kann mit der Gesamtanzahl der Trassen  $n_{ges}$  und dem Untersuchungszeitraum  $t_u$  berechnet werden. Der Ankunftsstrom  $\lambda$  entspricht dem Kehrwert des mittleren Ankunftsabstands  $\bar{t}_a$ .

$$\bar{t}_a = \frac{t_u}{n_{ges}} \quad (3-2)$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_a} = \frac{n_{ges}}{t_u} \quad (3-3)$$

Der Variationskoeffizient der Ankunftsabstände könnte theoretisch anhand einer statistischen Auswertung der Ankunftsabstände der Wunschtrassen ermittelt werden. Für langfristige Planungszeiträume liegen jedoch noch keine Trassenbestellungen vor.

Auch für kurz- oder mittelfristige Zeiträume eignen sich die vorliegenden Trassenbestellungen nicht, da diese in der Regel nicht die tatsächlichen Wunschabfahrtszeiten enthalten. Bei der Erstellung eines neuen Fahrplans wird meistens der vorherige Fahrplan als Grundlage genommen und den Anforderungen entsprechend modifiziert. Besonders Güterzugtrassen, die sich nur unwesentlich ändern, werden in ihrer alten konstruierten Fahrlage wiederbestellt. Dabei handelt es sich dann um „vorzensierte“ Trassenwünsche; die ursprüngliche Wunschlage wird nicht mehr berücksichtigt.

Da also keine statistischen Angaben über den Variationskoeffizienten der Ankunftsabstände vorliegen, muss dieser geschätzt werden. Der Variationskoeffizient wird durch die Bestellsituation bestimmt. Züge eines Eisenbahnverkehrsunternehmens der gleichen Verkehrsart - Personenfernverkehr, Personennahverkehr oder Güterverkehr – werden für die folgende Betrachtung zu einem Forderungsstrom zusammengefasst. Melden nun mehrere Eisenbahnverkehrsunternehmen Trassen für unterschiedliche Verkehrsarten an, so führt dies zu mehreren Forderungsströmen. Durch das Überlagern von mehreren Einzelforderungsströmen ergibt sich für den Gesamtstrom näherungsweise ein MARKOVscher Ankunftsprozess [17]. Die Güte der Näherung nimmt mit der Anzahl der Einzelforderungsströme zu.

Ein MARKOVscher Ankunftsprozess unterstellt ein „zufälliges“ Eintreffen der Kunden. Für diesen Fall gilt für den Variationskoeffizienten der Ankunftsabstände  $VA$ :

$$VA = 1 \quad (3-4)$$

Auch WENDLER [54], [58] unterstellt zur Berechnung der planmäßigen Wartezeiten bei einkanaligen Bedienstellen einen MARKOVschen Forderungsstrom. Da sich bei der Betrachtung eines Gesamtfahrstraßenknotens im Vergleich zu einer einkanaligen Bedienstelle noch mehr Einzelforderungsströme überlagern, kann für die folgenden Abschnitte für den Variationskoeffizienten der Ankunftsabstände an einem Gesamtfahrstraßenknoten  $VA = 1,0$  angesetzt werden.

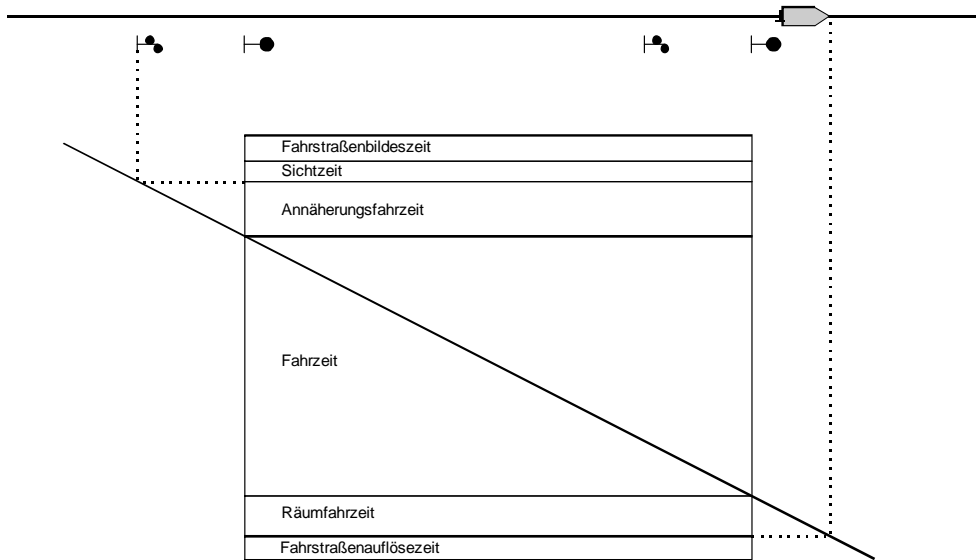
### 3.1.2 Bedienungsprozess

Für die Beschreibung des Bedienungsprozesses müssen die mittlere Bedienzeit  $\bar{t}_b$  sowie der Variationskoeffizient der Bedienzeiten  $VB$  als Streuungsmaß bekannt sein. Für die analytischen Modelle der Eisenbahnbetriebswissenschaft bilden die Mindestzugfolgezeiten  $z_{ij}$  die Bezugsgröße zur Ermittlung der Bedienzeiten.

#### 3.1.2.1 Mindestzugfolgezeiten

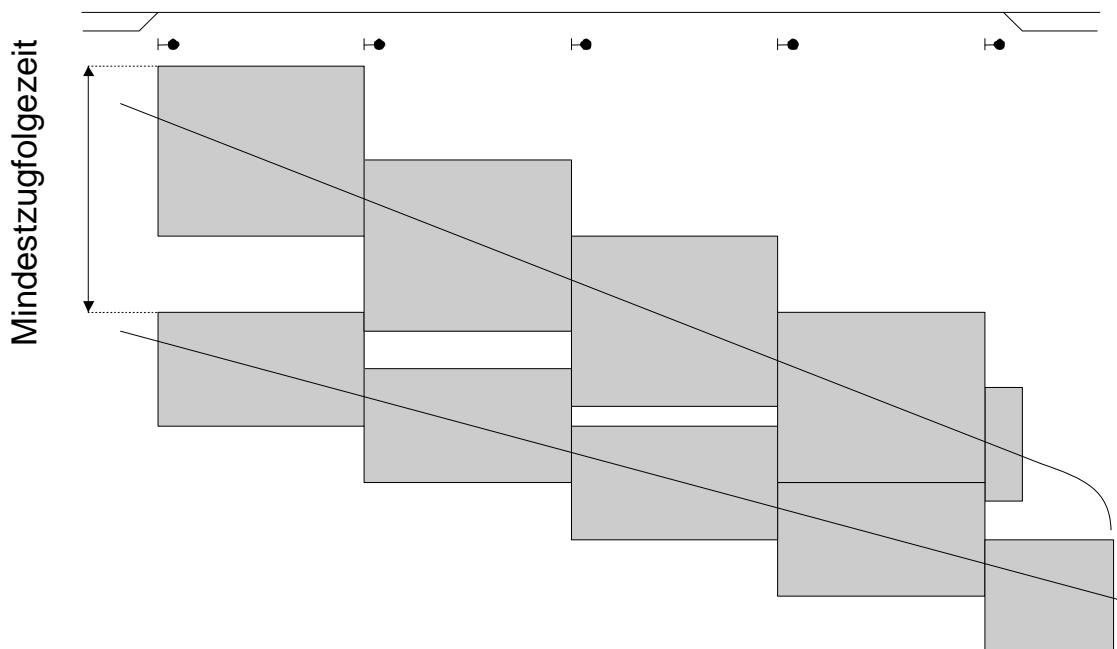
Die Mindestzugfolgezeit ist der zeitliche Abstand, in dem sich zwei Züge auf einem Abschnitt folgen können, ohne sich in ihrem Lauf zu behindern. Die Ermittlung der Mindestzugfolgezeiten erfolgt anhand von Sperrzeitentreppen, die sich aus den Sperrzeiten der Blockabschnitte ergeben. Die Begriffe Mindestzugfolgezeit und Sperrzeitentreppe wurden bereits 1959 von HAPPEL eingeführt [22].

Die Sperrzeit ist die Zeit, die ein Blockabschnitt durch eine Zugfahrt belegt ist. Neben der physikalischen Belegung durch den Zug (Fahrzeit) sind die Annäherungs- und Räumfahrzeit, die Fahrstraßenbilde- und auflösezeiten sowie die Sichtzeit zu berücksichtigen. Für eine Erläuterung und Berechnung der einzelnen Belegungselemente wird auf PACHL [39] verwiesen. Graphisch lässt sich die Sperrzeit anhand eines Zeit-Weg-Diagramms anschaulich darstellen.



**Abb. 5: Sperrzeit**

Die Sperrzeitentreppe eines Zuges setzt sich aus der Aneinanderreihung der einzelnen Sperrzeitenblöcke zusammen. Zur Bestimmung der Mindestzugfolgezeit werden die Sperrzeitentreppe zweier Züge so dicht wie möglich aneinander geschoben, so dass sich die Sperrzeitentreppe gerade berühren. Die Mindestzugfolgezeit ergibt sich aus der Zeit zwischen dem Beginn der Sperrzeitentreppe des vorlaufenden Zuges und dem Beginn der Sperrzeitentreppe des nachlaufenden Zuges im ersten gemeinsam befahrenen Abschnitt. Die Mindestzugfolgezeit ist somit nicht für einzelne Züge, sondern nur für Zuggefälle definiert.



**Abb. 6: Sperrzeitentreppe und Mindestzugfolgezeit**

Bei den modellierten Bediensystemen in der Eisenbahnbetriebswissenschaft handelt es sich in der Regel um Warteschlangenmodelle mit Prioritäten. Einige Zuggattungen besitzen bei der Fahrplankonstruktion und im Betrieb Vorrang. Um diese Rangunterschiede näherungsweise zu erfassen, führt SCHWANHÄUßER [45] die so genannten Dispositionszeiten  $t_d$  ein. Die Bedienzeiten  $b_{ij}$  ergeben sich dann aus der Addition von Mindestzugfolgezeiten und Dispositionszeiten

$$b_{ij} = z_{ij} + t_{d,ij} \quad (3-5)$$

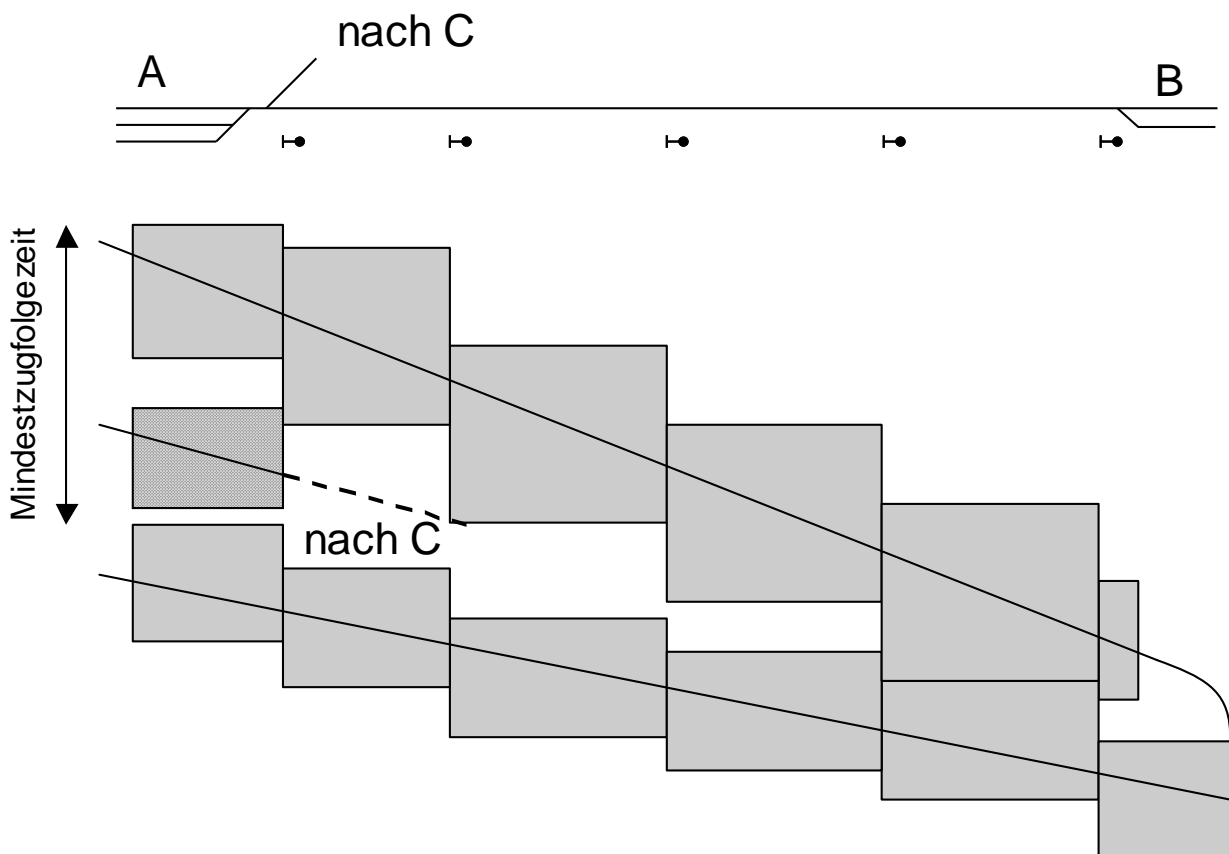
Ein Zug  $i$  hat dann vor einem Zug  $j$  Vorrang, wenn seine Rangziffer  $Rg_i$  kleiner als die Rangziffer  $Rg_j$  des Zugs  $j$  ist. Die Dispositionszeiten führen für den Zugfolgefall Vorrang – Nachrang zu größeren Bedienzeiten, für den Fall Nachrang – Vorrang werden die Bedienzeiten zu Null gesetzt.

$$t_{d,ij} = \begin{cases} z_{ij} & \text{wenn } Rg_i < Rg_j \\ 0 & \text{wenn } Rg_i = Rg_j \\ -z_{ij} & \text{wenn } Rg_i > Rg_j \end{cases} \quad (3-6)$$

### 3.1.2.2 Bedienzeiten eines Gesamtfahrstraßenknotens

Für die Ermittlung der Bedienzeiten eines Gesamtfahrstraßenknotens sind unterschiedliche Herangehensweisen denkbar. Die Bedienzeiten können anhand der im Kapitel 3.1.2.1 beschriebenen Mindestzugfolgezeiten bestimmt werden. In diesem Fall ist es möglich, dass sich bei Zugfahrten, welche die gleiche Strecke befahren, sogenannte Zeitlücken im Gesamtfahrstraßenknoten ergeben. Diese Zeitlücken können zwar nicht für weitere Zugfahrten auf dieser Strecke verwendet werden, jedoch ist es eventuell möglich, dass eine Zugfahrt einer anderen Strecke innerhalb dieser Zeitlücke realisiert wird.

Abb. 7 zeigt die Problematik der Zeitlücken beispielhaft: Im Gesamtfahrstraßenknoten des Bahnhofs A wird die Zeitlücke zwischen zwei Zugfahrten nach B durch eine Zugfahrt nach C genutzt. Obwohl sich die beiden Züge nach B im Abstand der Mindestzugfolgezeit folgen, kann trotzdem im Bahnhof A eine weitere Zugfahrt nach C realisiert werden. Daher ergeben sich bei der Verwendung der Mindestzugfolgezeiten für die Berechnung der Bedienzeiten aufgrund der Zeitlücken im Gesamtfahrstraßenknoten zu große Bedienzeiten.



**Abb. 7: Zeitlücke im Gesamtfahrstraßenknoten**

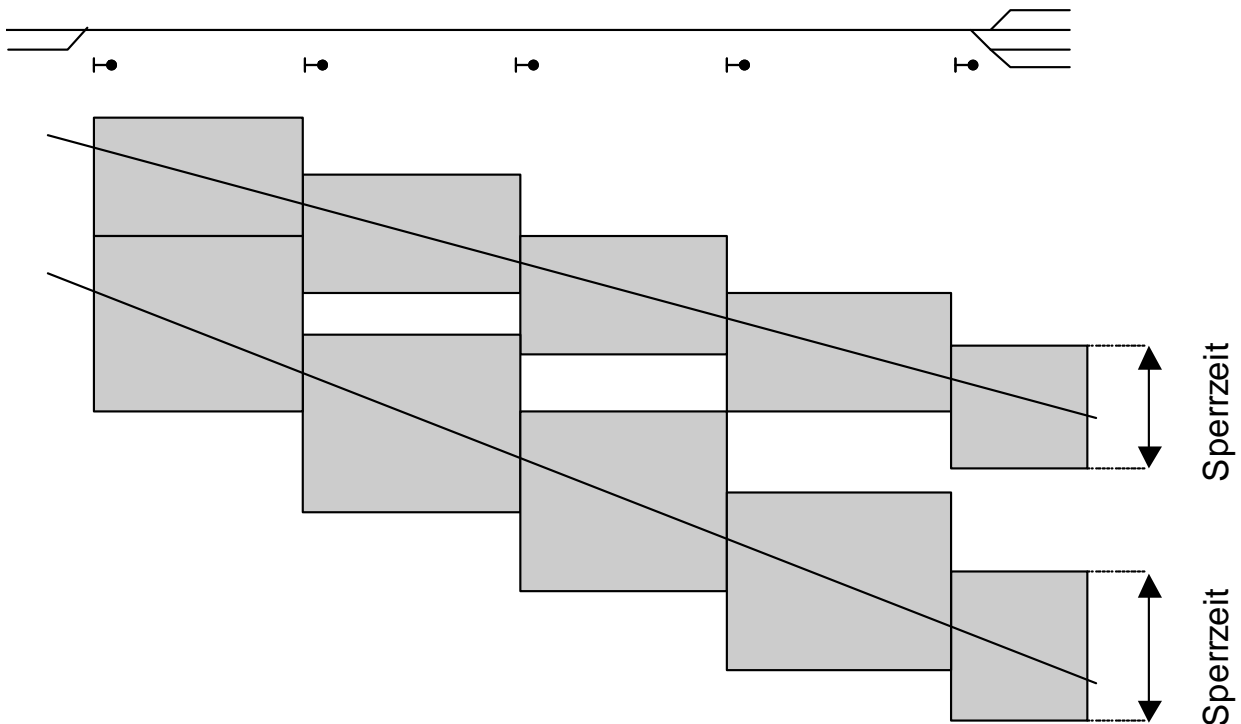
In dieser Arbeit wird daher bei der Bestimmung der Bedienzeiten für einen Gesamtfahrstraßenknoten nur der gemeinsam befahrene Abschnitt innerhalb des Gesamtfahrstraßenknotens gewählt. Dadurch wird nur jene Zeit berücksichtigt, in der der Gesamtfahrstraßenknoten auch tatsächlich belegt ist.

In der Eisenbahnbetriebswissenschaft wird diese Zeit – je nachdem ob der Zug auf den Bahnhof zufährt oder ihn verlässt – als Einfahr- oder als Ausfahrsperrzeit bezeichnet. Diese Sperrzeiten im Gesamtfahrstraßenknoten  $t_{Sperr,GFK}$  können anhand mikroskopischer Infrastrukturdaten berechnet oder mit Hilfe von makroskopischen Daten geschätzt werden [57].

Bei Verwendung der Sperrzeiten werden die Bedienzeiten im Gesamtfahrstraßenknoten unterschätzt. Dies ist der Fall, wenn sich Züge, welche die gleiche Strecke befahren, bei der Einfahrt in einem Bahnhof nicht im Abstand der Einfahrsperrzeit folgen können, da sie eine größere Zugfolgezeit auf dem Streckenabschnitt besitzen und die entstehende Zeitlücke nicht durch weitere Zugfahrten genutzt werden kann. Abb. 8 zeigt dies beispielhaft für den Fall, wenn ein langsamer Zug einem schnelleren folgt. Dieser Einfluss



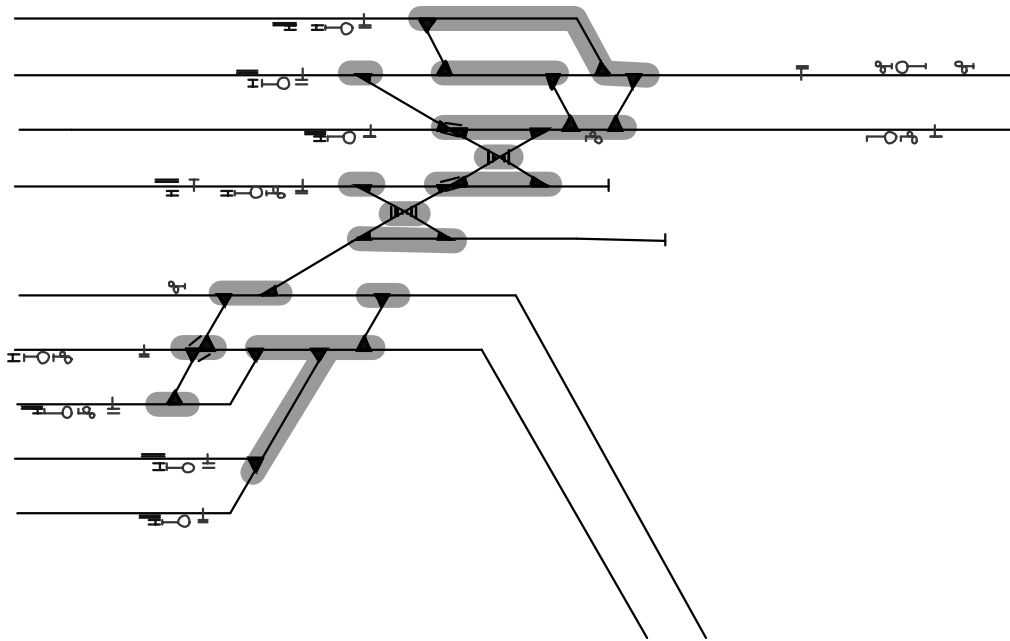
wird hier aber bewusst vernachlässigt und bei der späteren Wartezeitenberechnung gesondert erfasst (siehe Kapitel 9.1).



**Abb. 8: Sperrzeit im Gesamtfahrstraßenknoten**

### 3.1.3 Bedienungsstellen und Warteraum

Ein Eisenbahnnetz besteht aus einer Vielzahl von sequentiell-parallel verketteten Bedienungsstellen. SCHWANHÄÜßER [46] schlägt eine Dekompositionsmethode vor, bei der ein Teilnetz in seine einstelligen Bedienkanäle zerlegt wird. Diese einstelligen Bedienkanäle bezeichnet SCHWANHÄÜßER als Teilfahrstraßenknoten (TFK). Ein Teilfahrstraßenknoten stellt den größtmöglichen zusammenhängenden Gleisbereich dar, in dem sich alle Fahrten gegenseitig ausschließen. Die Teilfahrstraßenknotenabgrenzung erfolgt infrastrukturabhängig, in dem alle potentiellen Zugfahrten, und nicht nur die tatsächlichen, betrachtet werden. Die Warteplätze gehören nicht zu den Teilfahrstraßenknoten.



**Abb. 9: Ausschnitt Teilfahrstraßenknoten Aachen Hbf**

In der Eisenbahnbetriebswissenschaft wird bei der Modellierung des Warteraums vor den Teilfahrstraßenknoten aus pragmatischen Gründen von einem unendlich großen Warteraum ausgegangen, obwohl dieser in der Realität natürlich endlich ist. Bei einem endlichen Warteraum könnten im System Verluste auftreten. Unter der Annahme, dass Züge im Eisenbahnnetz nicht verloren gehen können, ist die Modellierung eines unendlichen Warteraums zweckmäßig.

### 3.1.4 Bediensysteme in der Eisenbahnbetriebswissenschaft

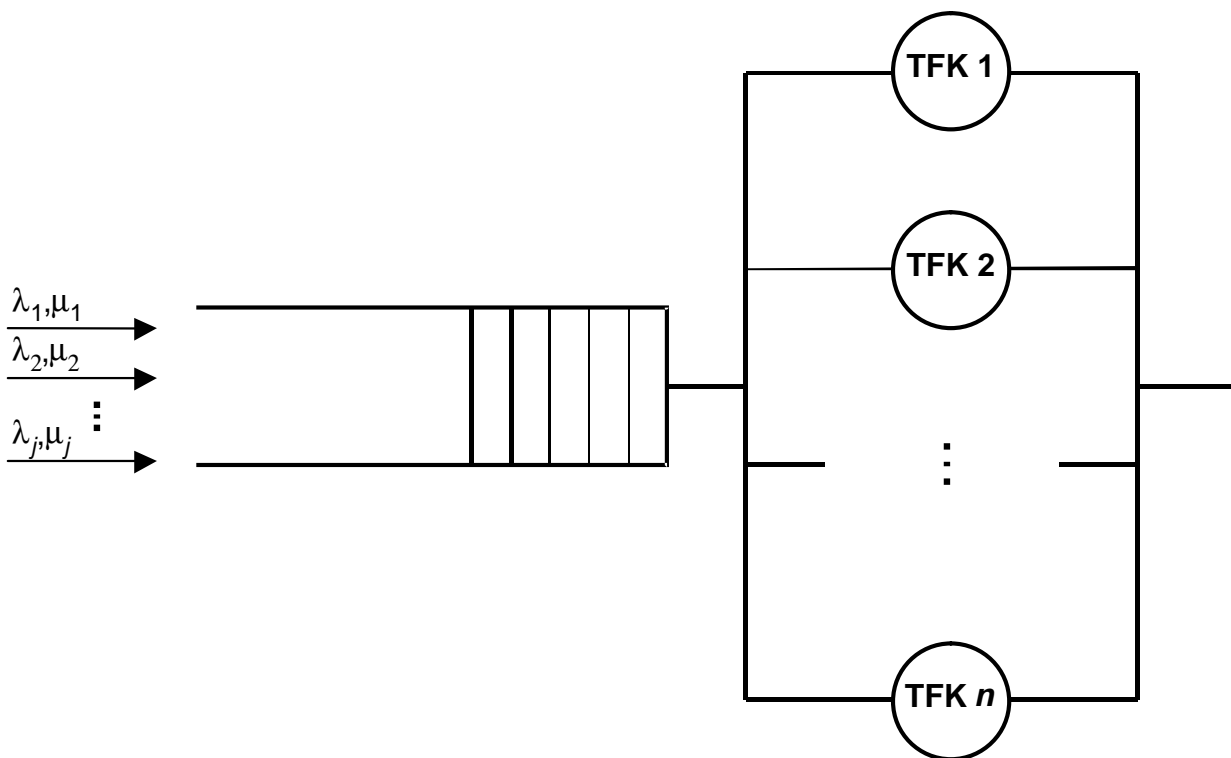
Für die Ermittlung von Wartezeiten in einem Eisenbahnnetz müssen die Elemente Strecke, Gleisgruppe und Gesamtfahrstraßenknoten als Bediensysteme modelliert werden.

Eine Eisenbahnstrecke kann als ein einkanaliges Warteschlangenmodell der Form  $GI/GI/1/\infty$  betrachtet werden, in dem Reihenfolgewechsel statthaft sind. Zur Berechnung der planmäßigen Wartezeiten, die bei der Fahrplankonstruktion aufgrund der Verschiebungen der zeitlichen Lage der Wunschtrassen entstehen, kann z. B. das Verfahren nach WAKOB [52] angewandt werden.

Eine Gleisgruppe besteht aus einer Anzahl von Bahnhofsgleisen und kann als ein mehrkanaliges Bediensystem der Form  $GI/GI/s/\infty$  angesehen werden. Die Gleise sind in diesem System die Bedienkanäle. Dabei wird unterstellt, dass jeder Bedienkanal von allen Kunden genutzt werden kann. Zur Ermittlung der planmäßigen Wartezeiten werden die Verfahren nach POTTHOFF [41] oder HERTEL [17] verwendet.

Die Modellierung eines Gesamtfahrstraßenknotens als mehrkanalige Bedienstelle gestaltet sich hingegen als problematisch. Die Teilfahrstraßenknoten repräsentieren die einzelnen Bedienkanäle des Systems. Ob mehrere Zugfahrten zeitgleich durchgeführt werden können, hängt von den Fahrwegen der einzelnen Züge ab. Nur für den Fall, dass zwei Zugfahrten unterschiedliche Teilfahrstraßenknoten belegen, können diese zur selben Zeit bedient werden. Außerdem liegt in der Regel keine gegenseitige Vertretbarkeit der Bedienkanäle vor, d. h. eine bestimmte Zugfahrt ist auf die dazugehörigen Bedienkanäle angewiesen.

In einem Gesamtfahrstraßenknoten erfolgt deswegen die zeitliche Belegung aller benötigten Bedienkanäle zeitgleich (Einstellen der Fahrstraße). Bei der Modellierung wird vereinfachend angenommen, dass diese Kanäle auch zur gleichen Zeit wieder freigegeben werden. In der Realität kann es vorkommen, dass durch Fahrstraßenteilauflösungen einige Teilfahrstraßenknoten nicht zeitgleich sondern nacheinander freigegeben werden.



**Abb. 10: Modellierung eines Gesamtfahrstraßenknotens als Bediensystem**

## 3.2 Kenngrößen

FENGLER, KLAHN und HASLINGER [15] haben zur Bewertung von Eisenbahninfrastruktur Kennzahlen aufgestellt. Diese Kennzahlen teilen sie in die Grunddaten sowie in die Leistungs-, und Qualitätskennzahlen auf. Während die Grunddaten das System beschreiben, liefern Leistungskenngrößen Aussagen über die Prozesse. Anhand von Qualitätskennzahlen können die getroffenen Aussagen bewertet werden.

Verschiedene Kenngrößen, die Aussagen über die Leistungsfähigkeit oder die Qualität der Anlage liefern, können mit Hilfe der Warteschlangentheorie bestimmt werden.

### 3.2.1 Leistungskenngrößen

Sind der Ankunfts- und Bedienprozess bekannt, so lassen sich für Standardwarteschlangenmodelle (z. B.  $M/M/1/\infty$ ) Kenngrößen wie die mittlere Wartezeit, die Wartewahrscheinlichkeit oder die theoretische Leistungsfähigkeit mit Hilfe von Formeln berechnen. Für komplexere Systeme ist oftmals keine geschlossene Lösung möglich, so dass diese Kenngrößen dann entweder geschätzt werden müssen und durch Simulationen ermittelt werden können.

#### 3.2.1.1 Verlustwahrscheinlichkeit

Eine erste Aussage über ein System liefert die Verlustwahrscheinlichkeit  $p_v$ . Sie beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein ankommender Kunde nicht mehr in den Warteraum aufgenommen werden kann und das System verlassen muss. Ist kein Warteraum vorhanden, so führt die Ankunft eines Kunden, der nicht sofort bedient werden kann, zum Verlust. Falls ein unendlich großer Warteraum vorhanden ist, so treten keine Verluste auf. Daher ist für Systeme mit einem unendlichen Warteraum die Verlustwahrscheinlichkeit gleich Null.

#### 3.2.1.2 Wartewahrscheinlichkeiten

Die Wartewahrscheinlichkeit  $p_w$  kann dann bestimmt werden, wenn ein Warteraum vorhanden ist. Sie beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein ankommender Kunde nicht sofort bedient werden kann, sondern zunächst warten muss. Bei Systemen mit einem endlichen Warteraum können sowohl Warte- als auch Verlustwahrscheinlichkeiten auftreten.

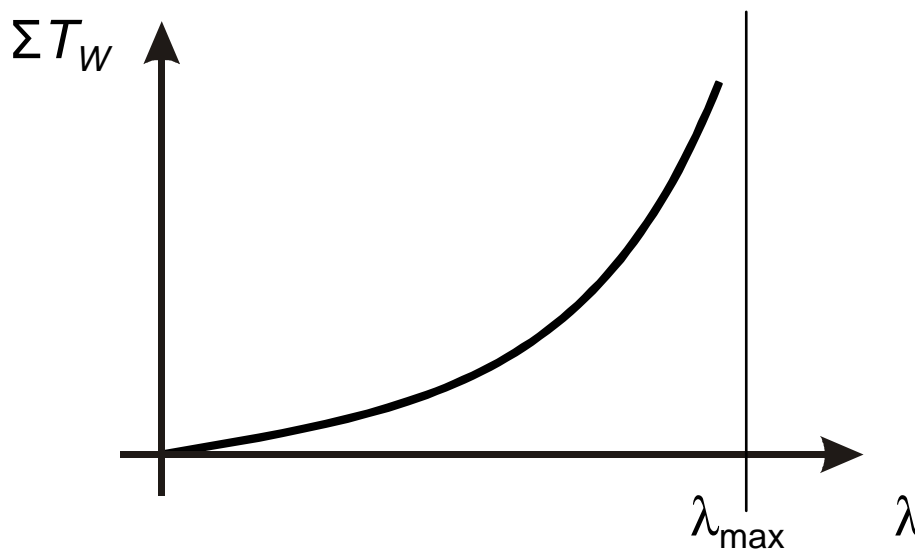
### 3.2.1.3 Wartezeiten

Die mittlere Wartezeit  $ET_W$  ist die Zeit, die ein Kunde durchschnittlich auf seine Bedienung warten muss. Sie wird über alle Kunden ermittelt. Als weitere Kenngröße lässt sich noch die mittlere Wartezeit der Wartenden  $ET_{WW}$  berechnen. Sie gibt an, wie lange ein Kunde im Mittel warten muss, wenn er nicht sofort bedient werden kann.

In den Modellen zur Berechnung der Wartezeiten in der Eisenbahnbetriebswissenschaft wird zwischen den planmäßigen und den außerplanmäßigen Wartezeiten differenziert.

### 3.2.1.4 Theoretische Leistungsfähigkeit

Die theoretische Leistungsfähigkeit gibt die maximale Ankunftsrate  $\lambda_{\max}$  an, die ein Bediensystem gerade noch bewältigen kann. Neben der Bezeichnung „theoretische Leistungsfähigkeit“ wird auch der Begriff der Grenzleistung verwendet [21]. Wenngleich die Grenzleistung für die praktische Betriebsführung nicht zur Anwendung kommen kann, da in diesem Fall ein theoretisch unendlicher Stau entstehen würde, stellt die Kenntnis über die Grenzleistung von Systemen eine wesentliche Voraussetzung zur analytischen Beschreibung des Leistungsverhaltens dar.



**Abb. 11: Theoretische Leistungsfähigkeit**

Abb. 11 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Ankunftsstrom  $\lambda$  und den entstehenden Wartezeiten. Mit steigender Auslastung steigen die Wartezeiten: an dem Punkt  $\lambda_{\max}$  der theoretischen Leistungsfähigkeit ergibt sich eine Polstelle. Übersteigt die Ankunftsrate  $\lambda_{\max}$ , so entsteht eine unendlich lange Warteschlange, da im Mittel mehr Kunden innerhalb eines Zeitintervalls eintreffen, als bedient werden können.

### 3.2.2 Qualitätskenngrößen

Die im vorhergehenden Kapitel erläuterten Leistungskenngrößen können Aussagen über den Zustand eines Warteschlangensystems liefern. Um jedoch eine optimale bzw. angestrebte Auslastung zu erreichen, müssen Qualitätskenngrößen definiert werden. Eine solche Qualitätskenngröße wird als „level of service“ bezeichnet.

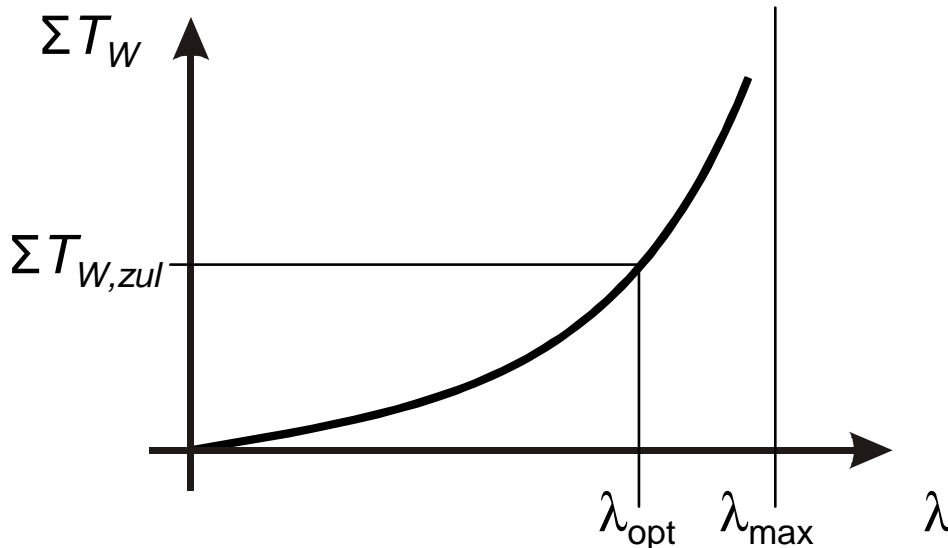
Als Qualitätskenngröße zur Bestimmung einer optimalen Auslastung wird in der Eisenbahnbetriebswissenschaft eine zulässige Wartezeitensumme  $\sum T_{W,zul}$  verwendet. Für Eisenbahnstrecken liegen die heute verwendeten zulässigen Wartezeitensummen nach SCHWANHÄUßER [47] für die planmäßigen Wartezeiten bei

$$\sum T_{W,plan_{zul}} = 0,479 \cdot t_U \cdot e^{-1,3 \cdot p_{Rz}} \quad (3-7)$$

und für die außerplanmäßigen Wartezeiten bei

$$\sum T_{W,ausserplan_{zul}} = 0,257 \cdot t_U \cdot e^{-1,3 \cdot p_{Rz}} \quad (3-8)$$

wobei  $p_{Rz}$  den Anteil der Reiszüge im Betriebsprogramm beschreibt.



**Abb. 12: Praktische Leistungsfähigkeit**

Die Abb. 12 zeigt den Zusammenhang zwischen Ankunftsstrom und Wartezeitensumme. Die optimale Leistungsfähigkeit  $\lambda_{opt}$  ergibt sich genau dann, wenn die zulässige Wartezeitensumme erreicht wird. Die theoretische Leistungsfähigkeit  $\lambda_{max}$  entspricht einem fiktiven Fahrplan, der keinerlei Pufferzeiten enthält.

In Eisenbahnnetzen werden für Dimensionierungsaufgaben von Gleisgruppen zulässige Wartewahrscheinlichkeiten verwendet. Bei der Deutschen Bahn [11] werden dafür die folgenden Qualitätsniveaus zu Grunde gelegt.

	Personenbahnhöfe	Rangierbahnhöfe
Regelwert	$p_W = 2,5 \%$	$p_W = 5 \%$
Grenzwert	$p_W = 5 \%$	$p_W = 10 \%$

**Tab. 1: Zulässige Wartewahrscheinlichkeiten bei Gleisgruppen**

## 4 Leistungskenngrößen für Gesamtfahrstraßenknoten - Stand der Forschung

Obwohl Eisenbahnknoten häufig den Engpass in einem Eisenbahnnetz darstellen, liegen für Knoten im Allgemeinen und Gesamtfahrstraßenknoten im Speziellen nur wenige Verfahren vor, die Aussagen über die Leistungsfähigkeit dieser Anlagen liefern können.

Bis zum jetzigen Zeitpunkt existiert kein vollständiger Ansatz, mit dem ein Gesamtfahrstraßenknoten modelliert und berechnet werden kann. Ebenfalls gibt es keine Vorgehensweise, um die theoretische Leistungsfähigkeit eines Gesamtfahrstraßenknotens zu ermitteln.

Bei den analytischen Ansätzen, mit denen heutzutage in der Eisenbahnbetriebswissenschaft Gesamtfahrstraßenknoten analysiert werden, handelt es sich um Näherungslösungen, die einen Gesamtfahrstraßenknoten auf ein einkanaliges Ersatzsystem reduzieren. Für dieses Ersatzsystem lassen sich dann die benötigten Kenngrößen bestimmen.

Alternativ werden unterschiedliche Simulationsprogramme eingesetzt um Aussagen über die Leistungsfähigkeit von (Teil-)Netzen und Eisenbahnknoten zu erhalten.

### 4.1 Verkettung von Zugfahrten

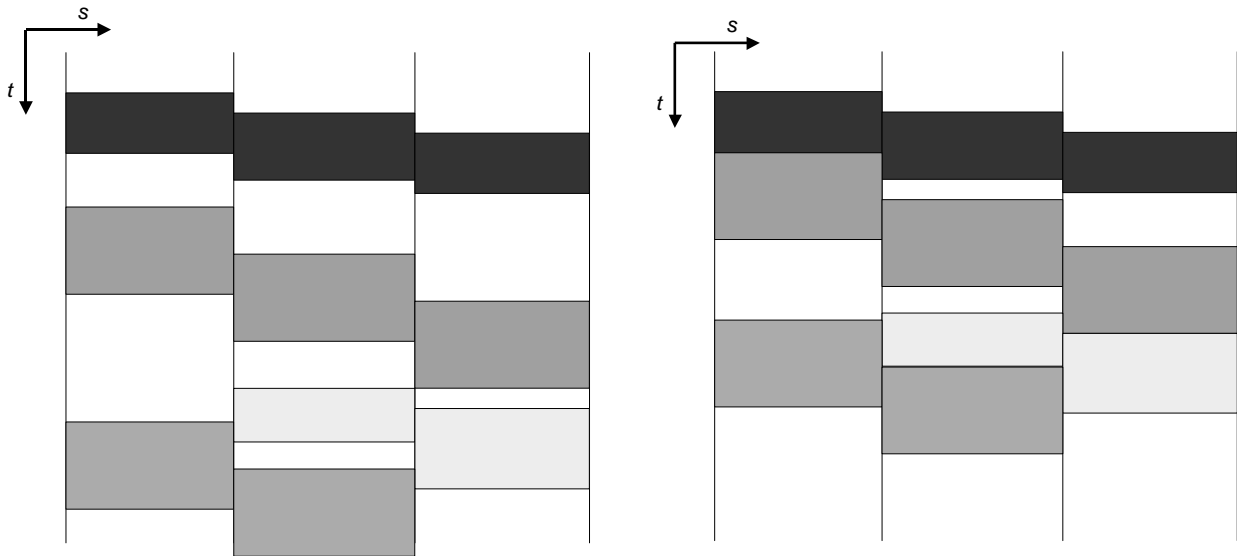
Für die Berechnung der Wartezeiten in einem Gesamtfahrstraßenknoten existiert das Modell der Verkettung. Bei der Verkettung werden die Belegungen der einzelnen Zugfahrten zu der dichtesten Packung zusammen geschoben. Erste Ansätze zur Verkettung stammen von ADLER, die später von POTTHOFF und SCHWANHÄÜBER erweitert wurden. Auch der Referenzstromansatz nach OETTING basiert auf der Verkettung von Zugfahrten.

#### 4.1.1 Verkettung einer Eisenbahnstrecke nach ADLER

Die Grundidee der Verkettung stammt von ADLER [1], der die Leistungsfähigkeit von Eisenbahnstrecken untersuchte. Bei der Verkettung, auch Methode der Komprimierung genannt, werden die Sperrzeitentrepfen der Züge eines Streckenabschnitts so dicht wie möglich aneinander geschoben. Dabei wird die Reihenfolge der Zugfahrten beibehalten. In Abb. 13 ist für einen Streckenabschnitt beispielhaft die Methode der Komprimierung dargestellt. Als Resultat ergibt sich die Belegungszeitraum  $t_B$  einer Eisenbahnstrecke innerhalb des Untersuchungszeitraums  $t_U$ . Zur Bestimmung des Belegungszeit-



raums  $t_B$  wird der erste Zug kopiert und als letzter Zug hinzugefügt. Die Zeitspanne vom Beginn der Sperrzeitentreppe des ersten Zuges bis zum Beginn der Sperrzeitentreppe des (kopierten) letzten Zuges ist der Belegungszeitraum  $t_B$ .



**Abb. 13: Belegungen eines Streckenabschnitts vor und nach der Verkettung**

Die Auslastung des Streckenabschnitts entspricht dem Belegungsgrad  $\rho$ , der sich als Quotient von Belegungszeitraum und Untersuchungszeitraum berechnen lässt.

$$\rho = \frac{t_B}{t_u} \quad (4-1)$$

Der Internationale Eisenbahnverband UIC verwendet heutzutage das Verfahren der Komprimierung nach ADLER für die Kapazitätsermittlung von Eisenbahnstrecken im Leaflet 406 [50]. Als Grundlage der Untersuchung dient dabei ein konkreter Fahrplan. Die Methode der Komprimierung kann aber auch fahrplanunabhängig bei bekannten Mindestzugfolgezeiten durchgeführt werden. Als Grenzwerte für die zulässige Auslastung  $\rho$  werden im UIC Leaflet 406 folgende, in Tab. 2 aufgeführten Werte angegeben.

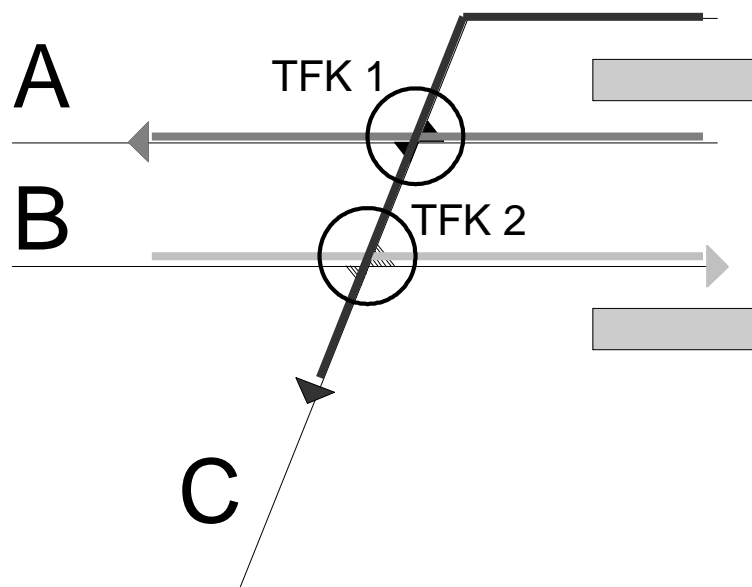
Streckenategorie	Spitzenstunde	Tageszeitraum
Personenahverkehr	0,85	0,70
Hochgeschwindigkeitsverkehr	0,75	0,60
Mischverkehr	0,75	0,60

**Tab. 2: Zulässiger Belegungsgrad nach UIC Leaflet 406**

#### 4.1.2 Verkettung eines Gesamtfahrstraßenknotens nach POTTHOFF

Für einen Gesamtfahrstraßenknoten betrachtet POTTHOFF die Verkettung von Fahrstraßenbelegungen. Die Vorgehensweise entspricht der von ADLER für Strecken, in dem die Belegungen der einzelnen Zugfahrten so dicht wie möglich zusammen geschoben werden.

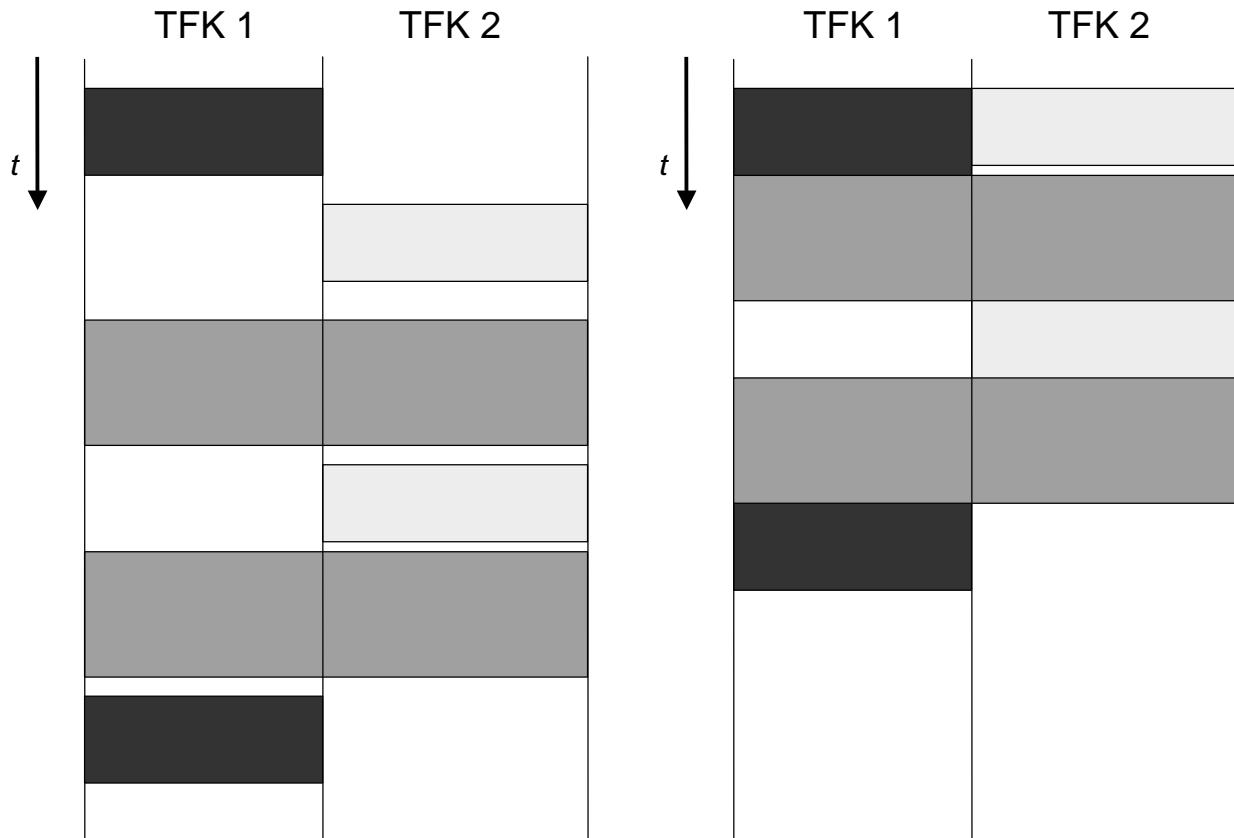
In Abb. 14 ist der Gesamtfahrstraßenknoten eines kleinen Bahnhofs mit drei Fahrmöglichkeiten A, B und C dargestellt. Die Fahrten A und B können zeitgleich stattfinden, andere Zugfahrten schließen sich gegenseitig aus.



**Abb. 14: Bahnhofskopf mit Fahrmöglichkeiten**

Wenn der Bahnhofskopf in seine einkanaligen Bedienstellen zerlegt wird, ergeben sich zwei Teilfahrstraßenknoten. Jede Kreuzungsweiche ist genau ein Teilfahrstraßenknoten.

Für dieses Beispiel werden bei der Verkettung die Belegungen der einzelnen Zugfahrten so weit wie möglich aneinander geschoben. In Abb. 15 sind die Belegungen vor und nach der Komprimierung dargestellt.



**Abb. 15: Belegungen im Gesamtfahrstraßenknoten vor und nach der Verkettung**

Der Belegungsgrad  $\rho$  des Gesamtsystems ergibt sich wiederum als Quotient von Belegungszeitraum und Untersuchungszeitraum.

$$\rho = \frac{t_B}{t_u} \quad (4-2)$$

Aufgrund unterschiedlicher Fahrtenausschlüsse ergeben sich verschiedene Ketten von aneinander gereihten Belegungszeiten. Die zeitlich längste Kette stellt den kritischen Pfad dar. Der Quotient aus der Zuganzahl des kritischen Pfads  $n_\varphi$  und der Gesamtzuganzahl  $n_{ges}$  ist die Verkettungszahl  $\varphi$ .

$$\varphi = \frac{n_\varphi}{n_{ges}} \quad (4-3)$$

POTTHOFF stellt ebenfalls eine Methode auf, um das Verfahren der Verkettung fahrplanunabhängig anzuwenden. Dazu untersucht er, ob sich Zugfahrten im Gesamtfahrstraßenknoten gegenseitig behindern und stellt die so genannte Fahrtausschlussmatrix  $\mathbf{A}$

auf [41].  $\mathbf{A}$  ist eine BOOLESCHE Matrix. Sie gibt an, ob zwei Zugfahrten  $i$  und  $j$  zeitgleich möglich sind, oder ob sie sich gegenseitig behindern.

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad (4-4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn die Zugfahrten } i \text{ und } j \text{ gleichzeitig möglich sind} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4-5)$$

Es gilt

$$a_{jj} = 1 \quad \forall j \quad (4-6)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Zugfahrt  $i$  sei  $p_i$ . Bei einer zufälligen Mischung der Verkehrsströme ist die Wahrscheinlichkeit der Fahrtenfolge  $i$ - $j$  das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Zugfahrt  $i$  und der Zugfahrt  $j$ .

$$p_i = \frac{n_i}{n_{ges}} \quad (4-7)$$

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j = \frac{n_i \cdot n_j}{n_{ges}^2} \quad (4-8)$$

Die Zuganzahl  $n_\varphi$  innerhalb der Kette ist die Summe jener Zugfolgefälle, für die ein Fahrtausschluss vorliegt.

$$n_\varphi = n_{ges} \cdot \sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \quad (4-9)$$

Durch Einsetzen von (4-9) in (4-3) lässt sich die Verkettungszahl  $\varphi$  zu

$$\varphi = \frac{n_\varphi}{n_{ges}} = \sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \quad (4-10)$$

bestimmen.

### 4.1.3 Berechnung der Wartezeiten mit Hilfe der Verkettungszahl

SCHWANHÄUßER interpretiert die Verkettungszahl  $\varphi$  als Kehrwert der im Mittel arbeitenden Bedienkanäle. Zur Berechnung der planmäßigen Wartezeiten schlägt er ein einkanaliges Ersatzsystem der Form M/GI/1/ $\infty$  vor [46]. In diesem Ersatzsystem werden die Zugfahrten  $n_\varphi$ , die in der maßgebenden Kette liegen, betrachtet.

$$ET_{W,GFK} = \frac{n_\varphi \cdot EB_{GFK}^2}{2 \cdot (t_U - n_\varphi \cdot EB_{GFK})} \quad (4-11)$$

Der Erwartungswert der Bedienzeit  $ET_B$  und das 2. Moment  $ET_B^2$  werden unter Berücksichtigung der Verkettungszahl bestimmt. Bei dem Erwartungswert für das 2. Moment der Bedienzeiten werden zur Berücksichtigung von Rangordnungen näherungsweise die Dispositionsbelegungszeiten verwendet. Ein Zug  $i$  hat dann vor einem Zug  $j$  Vorrang, wenn seine Rangziffer  $Rg_i$  kleiner als die Rangziffer  $Rg_j$  des Zugs  $j$  ist.

$$ET_{B,GFK} = \frac{\sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \cdot z_{ij}}{\varphi} \quad (4-12)$$

$$ET_{B,GFK}^2 = \frac{\sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \cdot (z_{ij} + t_{d,ij})^2}{\varphi} \quad (4-13)$$

$$\text{mit: } t_{d,ij} = \begin{cases} z_{ji} & \text{wenn } Rg_i < Rg_j \\ 0 & \text{wenn } Rg_i = Rg_j \\ -z_{ij} & \text{wenn } Rg_i > Rg_j \end{cases} \quad (4-14)$$

Die Verkettungszahl nach POTTHOFF stellt auch noch heutzutage den Stand der Technik dar. Die Verkettungszahl ist in der Fachliteratur, dort oftmals auch als Ausschlussgrad bezeichnet, erwähnt und wird für aktuelle eisenbahnbetriebswissenschaftliche Untersuchungen angewandt [39] [50]. Auf Grundlage von POTTHOFF sind analytische Warteschlangenmodelle insbesondere durch SCHWANHÄUßER in Aachen und HERTEL in Dresden bis zur Produktionsreife in Software-Verfahren weiterentwickelt [51].

#### 4.1.3.1 Beispielberechnung der Wartezeiten mit Hilfe der Verkettungszahl

In dem folgenden Beispiel wird für den in Kapitel 4.1.2 eingeführten Bahnhofskopf die Wartezeitenberechnung nach der fahrplanunabhängigen Methode nach SCHWANHÄÜßER unter Berücksichtigung der Verkettungszahl  $\varphi$  durchgeführt. Angaben über die Fahrtenausschlussmatrix und das Betriebsprogramm sind der Abb. 16 zu entnehmen.

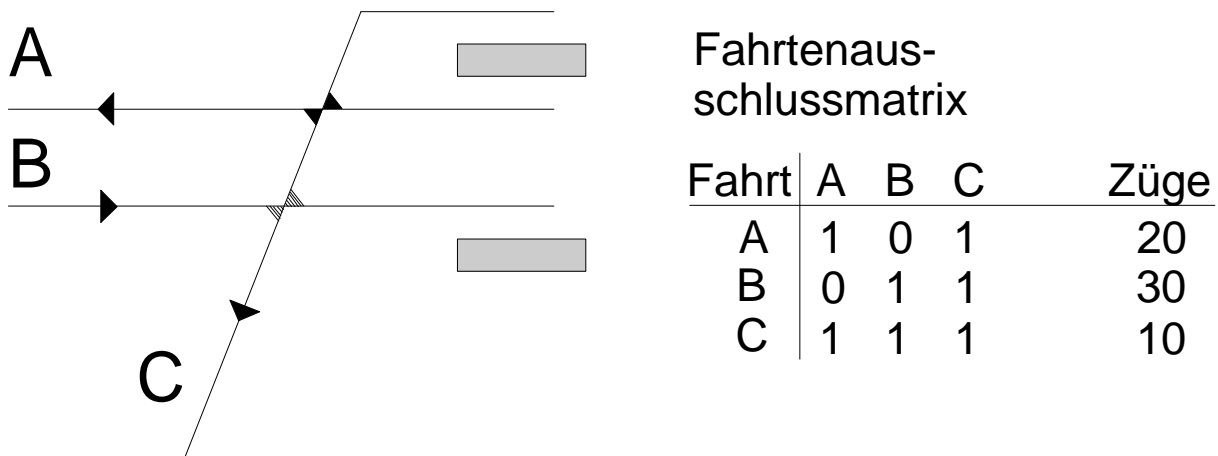


Abb. 16: Fahrtenausschlussmatrix für einen Gesamtfahrstraßenknoten

Die Matrix der Fahrtenfolgewahrscheinlichkeiten und die Verkettungszahl  $\varphi$  berechnen sich nach (4-8) und (4-10) für dieses Beispiel zu

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

Die Matrix Z der Mindestzugfolgezeiten sei wie folgt gegeben:

$$z_{ij} = \begin{pmatrix} 2,5 & - & 2 \\ - & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Unter der Annahme, dass alle Züge gleichrangig sind ergibt sich für den Erwartungswerte der Bedienzeiten und das 2. Moment nach (4-12) und (4-13):

$$ET_{B,GFK} = \frac{\sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \cdot z_{ij}}{\varphi} = 3,00$$

$$ET^2_{B,GFK} = \frac{\sum_i \sum_j p_{ij} \cdot a_{ij} \cdot (z_{ij} + t_{d,ij})^2}{\varphi} = 9,63 .$$

Somit kann der Erwartungswert der Wartezeit nach (4-11) für einen Untersuchungszeitraum von  $t_U = 240$  Minuten berechnet werden.

$$ET_{W,GFK} = \frac{n_\varphi \cdot EB^2_{GFK}}{2 \cdot (t_U - n_\varphi \cdot EB_{GFK})} = 1,60$$

#### 4.1.4 Referenzstromansatz

OETTING [35] hat einen Näherungsansatz entwickelt, der das komplexe System eines Gesamtfahrstraßenknotens auf unterschiedliche einkanalige Ersatzsysteme reduziert. Dazu betrachtet er die verschiedenen Ströme, die durch den Knoten laufen, und führt für jeden Strom einzeln eine Wartezeitenberechnung durch.

Der aktuell betrachtete Zug wird als Referenzstrom  $R$  bezeichnet. Ströme, die den Referenzstrom behindern, werden Störströme  $S$  genannt und Ströme, die keine Konflikte untereinander aufweisen, werden als parallele Ströme bezeichnet.

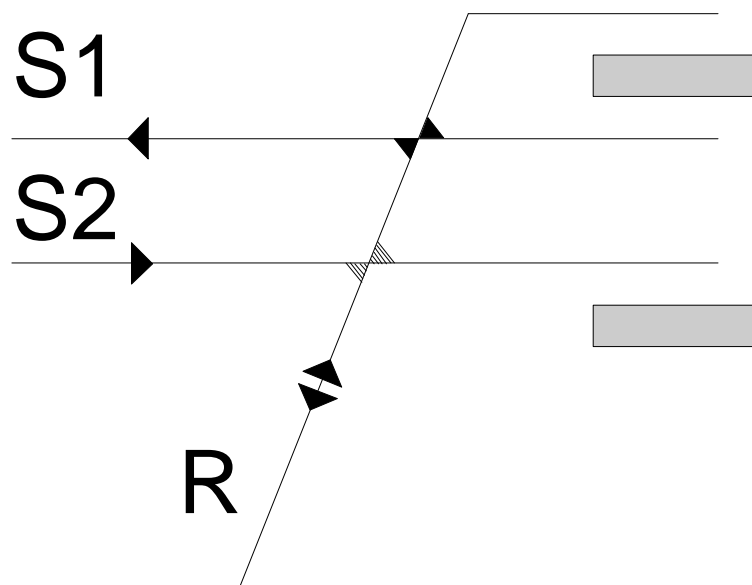


Abb. 17: Referenzstrom und Störströme

In der Abb. 17 ist der kreuzende Strom der Referenzstrom  $R$ ; die Ströme  $S1$  und  $S2$  sind parallele Störströme. Die Belegungsgrade der Ströme seien  $\rho_R$ ,  $\rho_{S1}$  und  $\rho_{S2}$ .

Die Störströme werden zu einem virtuellen Ersatzstrom  $E$  zusammengefasst. Dabei wird berücksichtigt, dass die Störströme und der Referenzstrom nicht zeitgleich bedient werden können. Der Zeitraum, der den Störströmen zur Verfügung steht, wird daher um den Faktor  $1-\rho_R$  reduziert.

Für den Belegungsgrad des Ersatzstromes  $\rho_E$  gilt in diesem Beispiel:

$$\rho_E = (1 - \rho_R) \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\rho_{S1}}{1 - \rho_R} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\rho_{S2}}{1 - \rho_R} \right) \right]. \quad (4-15)$$

OETTING verallgemeinert den Lösungsansatzes indem er weitere parallele Störströme einbezieht und Ströme, die den gleichen Laufweg wie der Referenzstrom aufweisen, berücksichtigt. Für den Belegungsgrad des Ersatzstroms  $E$  gilt dann:

$$\rho_E = \left( 1 - \rho_R - \sum_{u_j \in U} \rho_{u_j} \right) \cdot \left[ 1 - \prod_{i=1}^s \left( 1 - \frac{\rho_i + \sum_{o_{ij} \in O_i} \rho_{o_{ij}}}{1 - \rho_R - \sum_{u_j \in U} \rho_{u_j}} \right) \right]. \quad (4-16)$$

mit:

- $O_i$  Menge der Ströme  $o_{ij}$  mit gleichem Laufweg wie Strom  $i$
- $U$  Menge der Ströme  $u_j$  mit gleichem Laufweg wie der Referenzstrom  $R$
- $s$  Anzahl paralleler Störströme

Für den Belegungsgrad des einkanaligen Ersatzsystems  $\rho_{System}$  ergibt sich:

$$\rho_{System} = \rho_R + \sum_{u_j \in U} \rho_{u_j} + \rho_E. \quad (4-17)$$

Für die Wartezeitberechnung am einkanaligen Ersatzsystem unterstellt OETTING einen MARKOVschen Ankunftsprozess und verwendet die POLLACZEK-CHINTSCHIN-Formel.

$$ET_W = \frac{\rho_{System} \cdot ET_B \cdot (1 + VB^2)}{2 \cdot \rho_{System}} \quad (4-18)$$



mit:

$ET_W$  Erwartungswert der Wartezeiten je Zug

$ET_B$  Mittelwert der Bedienungszeiten  $T_B$

$VB$  Variationskoeffizient von  $T_B$

Problematisch gestalteten sich zum einen nicht parallele Störströme und zum anderen Störströme, die über mehrere Teilfahrstraßenknoten laufen. Damit die Einflüsse dieser Ströme berücksichtigt werden, sind alle möglichen Kombinationen aus Referenzstrom und Störströmen zu bilden. Maßgebend wird dann jene Kombination mit dem minimalen Ersatzbelegungsgrad. Für das Vorgehen wird auf [35] verwiesen.

Das Verfahren des Referenzstromansatzes eignet sich daher nur für kleinere und mittlere Gesamtfahrstraßenknoten mit wenigen Strömen.

## 4.2 Simulationen

Für eine Analyse komplexer Knoten eignen sich die in Kap. 4.1 beschriebenen analytischen Verfahren nur bedingt. Der Verkettungsansatz nach SCHWANHÄUßER liefert bei nur schwach verketteten Zugfahrten ungenaue Ergebnisse, der Referenzstromansatz nach OETTING scheitert an der Vielzahl zu betrachtender Kombinationen. Daher werden im Eisenbahnwesen für Untersuchungen von Großknoten oder Teilnetzen oftmals Simulationsverfahren eingesetzt. Beispielhafte Anwendungen der wichtigsten Simulationsverfahren finden sich in [20], [25] und [42].

Die in der Eisenbahnbetriebswissenschaft eingesetzten Simulationsverfahren teilen sich in synchrone und asynchrone Verfahren auf. Bei den synchronen Simulationsverfahren wird das Betriebsgeschehen zeitsynchron modelliert. Das geschieht durch eine Nachbildung der ablaufenden Prozesse in einem Modell. Ein Problem der synchronen Verfahren ist, dass bei dieser Vorgehensweise Deadlocks auftreten können. Ein Deadlock ergibt sich dann, wenn sich zwei Züge bei ihrer Weiterfahrt gegenseitig blockieren. Tritt dieses Problem bei einem Simulationslauf auf, so wird dieser abgebrochen und steht damit für die Auswertung nicht mehr zur Verfügung.

Im Gegensatz zur synchronen Simulation werden bei der asynchronen Simulation die Zugfahrten in Abhängigkeit von der Rangfolge über ihren gesamten Fahrweg in das Fahrplanblatt eingelegt. Erst nachdem die Konflikte der ranghöheren Züge gelöst sind, werden die Sperrzeitentrepfen der rangniedrigeren Züge eingelegt. Durch dieses Herangehen wird der Untersuchungszeitraum mehrmals durchlaufen. Für eine ausführli-

chere Beschreibung der synchronen und asynchronen Simulationsverfahren sei hier auf [53] verwiesen.

Da ein Simulationslauf eine Monte-Carlo-Simulation darstellt, ist eine Vielzahl von Läufen durchzuführen. Anhand der Auswertung der Simulationen ergeben sich dann Aussagen über z. B. prognostizierte Pünktlichkeiten, Anschlusssicherheiten oder Wartezeiten. Direkte Aussagen über die Belastung der Infrastruktur lassen sich mit Simulationsverfahren nicht erzielen. Diesen Nachteil versuchen ansatzweise BENDFELDT und WARNINGHOFF durch eine infrastrukturbezogene Auswertung der Simulationsläufe zu beheben [3]. Insgesamt betrachtet lässt sich jedoch mit analytischen Modellen ein besserer Zusammenhang zwischen Ankunftsrate und Leistungsfähigkeit der Infrastruktur herstellen.

Außerdem müssen für den Einsatz in eisenbahnbetriebswissenschaftlichen Verfahren, die zu strategischen Planungszwecken eingesetzt werden, die Rechenergebnisse innerhalb kürzester Zeit vorliegen [34]. Durch die Berücksichtigung von Netzwirkungen und Nachfrageänderungen entstehen mehrere Iterationsschleifen, in denen immer wieder der eisenbahnbetriebswissenschaftliche Kern mit den Rechenalgorithmen zur Bestimmung von Wartewahrscheinlichkeiten oder Wartezeiten aufgerufen wird [8]. Für diese Aufgabenstellung sind aufgrund der begrenzten Rechenzeit analytische Verfahren Simulationen vorzuziehen.

### 4.3 Mathematische Modelle

In der Mathematik gibt es mehrere Teilgebiete, in denen ähnliche Bediensysteme wie die eines Gesamtfahrstraßenknotens modelliert und analysiert werden. Entsprechende Modelle finden sich vor allem bei Computer- und Kommunikationsnetzwerken. Daher ist es naheliegend, diese mathematischen Modelle zu analysieren und auf eine mögliche Anwendung im Bereich der Eisenbahnbetriebswissenschaft zu überprüfen.

OMAHEN [36] hat den Begriff *multiresource queues* zur Beschreibung dieser speziellen Art von Warteschlangensystemen eingeführt. Als *multiresource queues* werden Bediensysteme mit mehreren Kanälen definiert, wobei verschiedene Kunden bestimmte Kanäle für ihre Bedienung zeitgleich benötigen. Ist bei Ankunft eines neuen Kunden mindestens ein benötigter Kanal belegt, so muss dieser Kunden warten. Während des Bedienprozesses können sich also mehrere Warteschlangen bilden. Ausgehend von dieser Definition kann ein Gesamtfahrstraßenknoten auch mit dem Begriff *multiresource queues* beschrieben werden.

Wenngleich OMAHEN den Begriff geprägt hat, ist es ihm nicht gelungen eine allgemeine Formel zur Wartezeitenberechnung für *multiresource queues* aufzustellen. Jedoch hat er Aussagen zur theoretischen Leistungsfähigkeit solcher Systeme getroffen [37], [38], auf die in Kapitel 6 eingegangen wird.

Eine der ersten Veröffentlichungen aus dem Bereich *multiresource queues* - ohne jedoch diese Bezeichnung zu verwenden - stammt von GIMPELSON aus dem Jahr 1965 [18]. GIMPELSON analysiert ein Warte- / Verlustsystem aus dem Telekommunikationsbereich mit zwei unterschiedlichen Kundentypen. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Kundentypen stammt von WHITT [60]. Jedoch betrachtet WHITT nur reine Verlustsysteme und formuliert Näherungslösungen für die Verlustwahrscheinlichkeiten.

Reine Wartesysteme wurden zunächst unabhängig von KIM [29] und GREEN [19] betrachtet. Bei den von ihnen analysierten Systemen benötigen die verschiedenen Kundentypen lediglich eine gewisse Anzahl von Bedienkanälen. Im Unterschied zu den oben definierten *multiresource queues* sind die Kunden jedoch nicht auf bestimmte Bedienkanäle festgelegt, sondern können aus der Gesamtheit der Kanäle theoretisch jeden belegen. Aufgrund dieser Modifikation bildet sich nur eine gemeinsame Warteschlange. Durch diese Vereinfachung lässt sich dann eine geschlossene Lösung zur Bestimmung der Wartezeiten ableiten.

In den Modellen von KIM und GREEN sind die Zwischenankunftszeiten und die Bedienzeiten negativ exponentialverteilt (MARKOV-Prozesse). Erweiterungen, in denen die Bedienzeiten der Kunden identisch, aber statistisch voneinander unabhängig verteilt (independent identical distributed) sind, wurden von BRILL und GREEN [6] sowie von FEDERGRUEN und GREEN [14] durchgeführt.

Bei dem Übergang von Wartesystemen auf reine Verlustsysteme tritt das Problem mehrerer Warteschlangen nicht mehr auf, da sich hier gar keine Warteschlangen bilden. Auf den Grundlagen von KAUFMANN [27] haben DZIONG und ROBERTS [12] eine exakte Lösung zur Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeiten von *multiresource queues* aufgestellt. Dieses Verfahren wird in Kapitel 7.1.1 erläutert.

In der Literatur lässt sich noch eine Reihe weiterer spezieller *multiresource queues* finden. Eine gute Übersicht darüber liefert MELIKOV [31]. Ein Verfahren zur Bestimmung der Wartezeiten von *multiresource queues* ist jedoch nicht darunter. Daher werden in den folgenden Kapiteln Formeln hergeleitet, um für einen Gesamtfahrstraßenknoten eine geschlossene Lösung zur analytischen Bestimmung der Wartezeiten zu erhalten.

## 5 Gesamtfahrstraßenknoten als *multiresource queue*

Ein Gesamtfahrstraßenknoten setzt sich aus insgesamt  $s$  Bedienkanälen zusammen. Die Bedienkanäle werden mit  $r = 1 \dots s$  durchnummeriert. Die Menge der Bedienkanäle sei  $R$ . In einem Bedienkanal kann sich maximal ein Kunde befinden. Der Kapazitätsvektor  $\mathbf{c}$  des Systems ist

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r, \dots, c_s) \quad (5-1)$$

$$\text{mit } c_r = 1 \quad \forall r. \quad (5-2)$$

Insgesamt gibt es  $g$  unterschiedliche Kundentypen, die einen oder mehrere Kanäle des Gesamtfahrstraßenknotens belegen. Kundentypen werden mit  $j = 1 \dots g$  bezeichnet und unterscheiden sich aufgrund ihrer verschiedenen Kanalansforderungen. Die Ankunftsrate der Kunden des Kundentyps  $j$  sei  $\lambda_j$ . Diese bestimmt sich über die Anzahl ankommender Kunden  $n_j$  des Kundentyps  $j$  im Zeitraum  $t_U$ .

$$\lambda_j = \frac{n_j}{t_U} \quad (5-3)$$

Die Gesamtanzahl aller ankommender Kunden im Zeitraum  $t_U$  sei  $n_{ges}$ .

$$n_{ges} = \sum_{j=1}^g n_j \quad (5-4)$$

Wenn nicht anders erwähnt, seien die Zwischenankunftszeiten eines Forderungsstroms statistisch voneinander unabhängig mit identischer Verteilung (independent identical distributed). Die Gesamtankunftsrate aller Kunden  $\lambda$  ist die Gesamtanzahl aller Kunden dividiert durch den Untersuchungszeitraum. Sie kann alternativ anhand der Summe der Ankunftsrate der einzelnen Kunden ermittelt werden.

$$\lambda = \frac{n_{ges}}{t_U} = \sum_{j=1}^g \lambda_j \quad (5-5)$$

Das Verhältnis der Ankunftsrate des Kunden  $j$  in Bezug auf die Gesamtankunftsrate wird durch den Faktor  $f_j$  beschrieben.

$$f_j = \frac{\lambda_j}{\lambda} \quad (5-6)$$

Die Belegungsmatrix  $\Delta$  zeigt die Kanäle an, die durch einen Kunden belegt werden. Die Belegungsmatrix ist eine BOOLESCHE Matrix der Dimension  $g \times s$ .

$$\Delta = (\delta_{jr}) \quad (5-7)$$

$$\delta_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kunde } j \text{ den Kanal } r \text{ belegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5-8)$$

Die  $j$ -te Zeile der Belegungsmatrix beschreibt die Anforderung  $\delta_{j\bullet}$  des Kunden  $j$ .

$$\delta_{j\bullet} = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{jr}, \dots, \delta_{js}) \quad (5-9)$$

Der Beginn einer Belegung durch einen Kunden erfolge für alle benötigten Kanäle zeitgleich. Nach der Bedienung des Kunden  $j$  mit der Bedienrate  $\mu_j$  werden alle belegten Kanäle zur selben Zeit wieder freigegeben. Die Bedienzeiten seien statistisch voneinander unabhängig mit identischer Verteilung.

Die Ausschlussmatrix  $\mathbf{A}$  ist eine BOOLESCHE Matrix der Dimension  $g \times g$ . Sie gibt an, ob zwei Kunden zeitgleich bedient werden können oder ob diese beiden Kunden im Gesamtfahrstraßenknoten einen Ausschluss haben. Es sei

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad (5-10)$$

mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kunde } i \text{ und } j \text{ mindestens einen Kanal gemeinsam belegen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5-11)$$

Die Hauptdiagonale der Ausschlussmatrix ist folglich mit Einsen belegt, da ein Kunde  $j$  mit einem weiteren Kunden  $j$  stets einen Ausschluss hat.

$$a_{jj} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, g \quad (5-12)$$

Die Ausschlussmatrix kann anhand der Anforderungen  $\delta_{j\bullet}$  der Kunden wie folgt ermittelt werden:

$$a_{ij} = \min \{ \delta_{i\bullet} \cdot \delta_{j\bullet}^T, 1 \}. \quad (5-13)$$

Die Bedienrate eines Kunden  $\mu_j$  ist der Kehrwert seiner mittleren Bedienzeit. Die mittlere Bedienzeit eines Kunden entspricht der mittleren Sperrzeit im Gesamtfahrstraßenknoten  $\bar{t}_{Sperr,GFK,j}$ . Somit gilt:

$$\mu_j = \frac{1}{\bar{t}_{Sperr,GFK,j}}. \quad (5-14)$$

Der Belegungsgrad  $\rho_j$  eines Kunden  $j$  ist definiert als das Verhältnis von dessen Ankunfts- und Bedienrate.

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \quad (5-15)$$

Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist das System entweder leer, oder es findet eine Bedienung von mindestens einem Kunden statt. Ob mehrere Kunden zur selben Zeit bedient werden können, hängt von den Anforderungen  $\delta_j$  der Kunden ab. Mit Hilfe von Kundenkombinationen  $\mathbf{k}$  können die Zustände des Systems beschrieben werden. Eine mögliche Kundenkombination liegt dann vor, wenn alle Kunden einer Kombination zeitgleich bedient werden können. Die Anzahl aller möglichen Kundenkombinationen mit mindestens einem Kunden sei  $m$ . Der triviale Fall, dass sich kein Kunde im System befindet, wird mit  $\mathbf{k}_0$  bezeichnet. Kombinationen werden mit  $l = 0 \dots m$  durchnummeriert. Die Kombination  $\mathbf{k}_l$  liefert eine Aussage, welche Kunden in der Kombination  $l$  vorkommen. Eine Kombination wird beschrieben durch

$$\mathbf{k}_l = (k_{1l}, k_{2l}, \dots, k_{jl}, \dots, k_{gl}) \quad (5-16)$$

mit

$$k_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn in der Kombination } l \text{ ein Kunde } j \text{ enthalten ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5-17)$$

Die triviale Kombination ergibt sich durch

$$k_{j0} = 0 \quad \forall j = 1 \dots g. \quad (5-18)$$

Eine Kombination  $\mathbf{k}_l$  ist genau dann eine mögliche Kombination, wenn

$$\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{\Delta} \leq \mathbf{c} \quad (5-19)$$

gilt.

Die Menge aller möglichen Kombinationen sei  $\Psi$ .

$$\Psi = \{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_l, \dots, \mathbf{k}_m\} \quad (5-20)$$

Eine Kombination  $\mathbf{k}_l$  kann einen oder mehrere Kanäle des Systems belegen. Die Kombinationsbelegungsmatrix  $\Gamma$  zeigt die Kanäle an, die bei den Kombinationen  $\mathbf{k}_l$  belegt werden.  $\Gamma$  ist eine  $m \times s$  Matrix.

$$\Gamma = (\gamma_{lr}) \quad (5-21)$$

$$\gamma_{lr} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kanal } r \text{ bei der Kombination } l \text{ belegt ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5-22)$$

$$\gamma_{lr} = \sum_{j=1}^g k_{jl} \cdot \delta_{jr} \quad (5-23)$$

Die Menge  $\Psi$  wird nun in Abhängigkeit von einem ankommenden Kunden  $j$  aufgeteilt. Die Menge  $\Omega_j \subset \Psi$  sei die Menge der Kombinationen, in denen ein ankommender Kunde  $j$  unmittelbar bedient werden kann; d. h. dass bei Ankunft von Kunde  $j$  alle benötigten Kanäle frei sind. Die Elemente von  $\Omega_j$  können wie folgt charakterisiert werden:

$$\mathbf{k}_l \in \Omega_j \Leftrightarrow \delta_{jr} + \gamma_{lr} \leq 1 \quad \text{für } r = 1 \dots s. \quad (5-24)$$

Die komplementäre Menge zu  $\Omega_j$  sei  $\Phi_j$ , d.h.

$$\Phi_j \subset \Psi \quad (5-25)$$

und

$$\Omega_j \cup \Phi_j = \Psi. \quad (5-26)$$

Die Menge  $\Phi_j$  beinhaltet alle Kombinationen in denen ein ankommender Kunde  $j$  nicht direkt in die Bedienung gehen kann, da mindestens ein benötigter Kanal belegt ist. Aus der Charakterisierung von  $\Phi_j$  folgt, dass

$$\mathbf{k}_l \in \Phi_j \Leftrightarrow \delta_{jr} + \gamma_{lr} > 1 \quad \text{für mindestens einen Kanal } r. \quad (5-27)$$

Der stationäre Zustand des Systems  $\Pi$  kann durch Zustandswahrscheinlichkeiten beschrieben werden. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $\pi_l$  befindet sich das System

im Zustand der Kombination  $l$ . Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand, in dem sich kein Kunde im System befindet, wird mit  $\pi_0$  bezeichnet.

$$\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l, \dots, \pi_m\} \quad (5-28)$$

Dabei gilt für die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$0 \leq \pi_l \leq 1 \quad (5-29)$$

und

$$\sum_{l=0}^m \pi_l = 1. \quad (5-30)$$



## 6 Bestimmung der theoretischen Leistungsfähigkeit

Der Durchsatz eines Bediensystems entspricht dem Strom am Ausgang des Systems und wird in bedienten Forderungen pro Zeiteinheit gemessen. Die Leistungsfähigkeit eines Bediensystems ist der Durchsatz, der unter gewählten Randbedingungen realisierbar ist. Randbedingungen können z. B. eine zulässige Wartewahrscheinlichkeit oder eine zulässige mittlere Länge der Warteschlange sein.

Die theoretische Leistungsfähigkeit, die in der Literatur [17] auch als maximale Leistungsfähigkeit bezeichnet wird, ist der maximale Durchsatz, der unter optimaler Ausnutzung der Ressourcen ohne Beachtung von Randbedingungen realisiert werden kann. Bei einem einkanaligen Bediensystem ist die theoretische Leistungsfähigkeit erreicht, wenn der Belegungsgrad  $\rho$  den Wert 1,0 annimmt. Für die maximale Ankunftsrate  $\lambda_{\max}$  gilt in diesem Fall

$$\lambda_{\max} = \mu.$$

OMAHEN und MARATHE [37], [38] haben für mehrkanalige Bediensysteme einen Algorithmus entwickelt, mit dessen Anwendung sich die theoretische Leistungsfähigkeit eines Systems für beliebige Kundenforderungen bestimmen lässt. Das allgemein gehaltene System vereinfacht sich bei der Betrachtung eines Gesamtfahrstraßenknotens. Im Folgenden wird die Herleitung zur Bestimmung der theoretischen Leistungsfähigkeit (Grenzleistung) eines Gesamtfahrstraßenknotens aufgezeigt.

Die Leistungsfähigkeit eines Gesamtfahrstraßenknotens ist von der gewählten Bedienstrategie abhängig. Werden Kunden z. B. nach dem Prinzip first-in-first-out bedient oder wird mit Prioritäten gearbeitet, können nicht nutzbare Zeitlücken entstehen, die die Leistungsfähigkeit des Systems vermindern [33]. Um die theoretische Leistungsfähigkeit zu erzielen, müssen daher die Kundenanforderungen bei der Bedienung optimal gruppiert werden, so dass zwischen den Bedienvorgängen in den einzelnen Kanälen möglichst keine Zeitlücken entstehen. Durch dieses Gruppieren von Kunden ergeben sich verschiedene Kundenkombinationen. Die Häufigkeit dieser Kombinationen ist nun so zu wählen, dass sich für das Gesamtsystem ein maximaler Durchsatz einstellt.

Das LITTLEsche Gesetz [30]

$$EL_V = \lambda \cdot ET_V \quad (6-1)$$

stellt einen Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Kundenanzahl im System  $EL_V$  sowie dem Produkt der Ankunftsrate  $\lambda$  und der durchschnittlichen Verweilzeit  $ET_V$

her. Das Gesetz kann ebenso für die durchschnittliche Anzahl wartender Kunden  $EL_W$  und die durchschnittliche Wartezeit  $ET_W$  sowie für die durchschnittliche Anzahl von Kunden in Bedienung  $EL_B$  und die durchschnittliche Bedienzeit  $ET_B$  angewandt werden.

$$EL_W = \lambda \cdot ET_W \quad (6-2)$$

$$EL_B = \lambda \cdot ET_B \quad (6-3)$$

Angewandt auf einen Gesamtfahrstraßenknoten entspricht die mittlere Anzahl von Kunden des Typs  $j$  in Bedienung der Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand befindet, in dem Kunde  $j$  enthalten ist. Die Zustände des Systems werden anhand der Kombinationen  $k_l$  beschrieben.

$$EL_{B,j} = \sum_{l=0}^m k_{jl} \cdot \pi_l \quad (6-4)$$

Eingesetzt in Gleichung (6-3) und unter Beachtung, dass der Erwartungswert der Bedienzeit  $ET_B$  dem Kehrwert der Bedienrate entspricht, folgt für einen Kunden  $j$

$$\sum_{l=0}^m k_{jl} \cdot \pi_l = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \quad (6-5)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (5-6), Umformen und unter Berücksichtigung, dass die Kombination  $k_0$  keine Kunden enthält, ergibt sich

$$\lambda = \frac{\mu_j}{f_j} \cdot \sum_{l=1}^m k_{jl} \cdot \pi_l \quad (6-6)$$

Die maximale Ankunftsrate  $\lambda = \lambda_{\max}$  kann nun anhand einer linearen Optimierung gefunden werden. Als Zielfunktion ist die Ankunftsrate  $\lambda$  zu maximieren. Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi_l(\lambda_{\max})$  sind dabei von der Ankunftsrate abhängig.

Zusätzlich gilt nach (5-29) und (5-30) für die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$0 \leq \pi_l \leq 1 \quad (6-7)$$

$$\pi_0 + \sum_{l=1}^m \pi_l = 1. \quad (6-8)$$

Da sich bei der Bestimmung der theoretischen Leistungsfähigkeit das System niemals im Leerzustand befindet, ist

$$\pi_0(\lambda_{\max}) = 0.$$

Als Nebenbedingungen der linearen Optimierung sind die Gleichungen (6-6) bis (6-8) anzusetzen. Insgesamt existieren somit  $g + m + 1$  Nebenbedingungen. Das Optimierungsproblem lässt sich also in folgender Form beschreiben:

$$\lambda_{\max} = \max \left\{ \lambda \mid \lambda = \frac{\mu_j}{f_j} \cdot \sum_{l=1}^m k_{jl} \cdot \pi_l(\lambda_{\max}) \quad \forall j = 1 \text{K} g, \right. \\ \left. 0 \leq \pi_l(\lambda_{\max}) \leq 1 \quad \forall l = 1 \text{K} m, \sum_{l=1}^m \pi_l(\lambda_{\max}) = 1 \right\}. \quad (6-9)$$

Bei der Berechnung der maximalen Ankunftsrate  $\lambda_{\max}$  ergeben sich die Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi_l(\lambda_{\max})$ , in denen sich das System befinden muss, damit ein maximaler Durchsatz erreicht wird. Diese Zustandswahrscheinlichkeiten geben dann Aufschluss, welche Kundenkombinationen bevorzugt bedient werden sollen.

Dabei ist die Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten für den maximalen Durchsatz nicht immer eindeutig: unter Umständen existieren mehrere Möglichkeiten von optimalen Kundenkombinationen, die zu einem maximalen Durchsatz führen.

Im Eisenbahnwesen, bei dem die Wunschtrassen den Kundenanforderungen entsprechen, gibt es bestimmte Prioritätenregeln, in welcher Reihenfolge die Kunden zu bedienen sind. Wird an diesen Regeln festgehalten, so werden üblicherweise nicht die optimalen Systemzustände eines Gesamtfahrstraßenknotens erreicht. Die vorhandene Kapazität wird somit nicht optimal ausgenutzt. Der europäische Gesetzgeber hat jedoch in der Richtlinie 2001/14/EG [13] in Artikel 22, Absatz 3 die Möglichkeit eröffnet, dass der Infrastrukturbetreiber bei der Zuweisung von Fahrwegkapazität für überlastete Fahrwege zusätzliche Kriterien anwenden kann. In diesem Fall wäre es möglich, die Kapazität eines Gesamtfahrstraßenknotens mit Hilfe der bevorzugten Zustandswahrscheinlichkeiten besser auszunutzen.

Um einen Gesamtfahrstraßenknoten als überlastet zu deklarieren, kann das internationale Verfahren nach dem UIC Code 406 [50] angewendet werden (vgl. Kap. 4.1.1). Dazu müssten die dort verwendeten Richtwerte allerdings für den Gesamtfahrstraßenknoten angepasst werden. Als Grenzwert, ab dem ein Gesamtfahrstraßenknoten als ausgelastet gekennzeichnet werden kann, tritt anstelle eines zulässigen Belegungsgrads  $\rho_{zul}$  ein zulässiger Ankunftsstrom  $\lambda_{zul}$ .

$$\lambda_{zul} = \rho_{zul} \cdot \lambda_{\max} \quad (6-10)$$

Der zulässige Belegungsgrad ergibt sich aus dem UIC Code 406 und ist von der Infrastrukturnutzung (Streckenategorie) abhängig. So beträgt zum Beispiel der zulässige Belegungsgrad einer Mischverkehrsstrecke  $\rho_{zul} = 0,6$ . Dieser Wert könnte auch für einen Gesamtfahrstraßenknoten, über den Mischverkehr abgewickelt wird, zugrunde gelegt werden. Daraus würde dann folgen, dass 60 Prozent der zur Verfügung stehenden Kapazität ausgenutzt sein müssen, damit der Gesamtfahrstraßenknoten als ausgelastet gilt. Beträgt die theoretische Leistungsfähigkeit dieses Gesamtfahrstraßenknotens  $\lambda_{max} = 2,5$ , so ist ein Ankunftsstrom von

$$\lambda_{zul} = \rho_{zul} \cdot \lambda_{max} = 0,6 \cdot 2,5 = 1,5$$

zulässig. Übersteigt der Ankunftsstrom diesen Wert, so ist der Gesamtfahrstraßenknoten überlastet.

## 7 Berechnung der planmäßigen Wartezeiten

Für die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten sowie der plan- und außerplanmäßigen Wartezeiten wird ein MARKOVscher Forderungsstrom unterstellt. Die Bedienzeiten seien identisch und unabhängig verteilt.

### 7.1 Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten

#### 7.1.1 Verfahren nach DZIONG und ROBERTS

DZIONG und ROBERTS [12] stellen einen Algorithmus vor, mit dem die Verlustwahrscheinlichkeiten in einem Kommunikationsnetzwerk bestimmt werden können.

Zur Ermittlung der Verlustwahrscheinlichkeiten  $p_V$  sind zunächst die Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi_l$  für den stationären Zustand zu bestimmen. Für jede Kombination  $\mathbf{k}_l$  gilt:

$$\pi_l = \pi_0 \cdot \prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}} \quad (7-1)$$

Im Folgenden wird bei der Normierungsbedingung (5-30)

$$\sum_{l=0}^m \pi_l = 1$$

zunächst der erste Summand ausgeschrieben

$$\pi_0 + \sum_{l=1}^m \pi_l = 1 \quad (7-2)$$

und anschließend die Gleichung (7-1) eingesetzt

$$\pi_0 + \sum_{l=1}^m \left( \pi_0 \cdot \prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}} \right) = 1. \quad (7-3)$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^m \prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}}}. \quad (7-4)$$

Da für die Kombinationen  $k_{j0}$

$$\prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{j0}} = 1 \quad (7-5)$$

gilt, kann Gleichung (7-4) zu

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{l=0}^m \prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}}} \quad (7-6)$$

vereinfacht werden. Der Kehrwert von  $\pi_0$  kann als Normalisierungskonstante  $G$  angesehen werden.

$$G = \pi_0^{-1} = \sum_{l=0}^m \prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}} . \quad (7-7)$$

Da nun der Zustand  $\pi_0$  und die Normalisierungskonstante bestimmt sind, lassen sich alle weiteren Zustände mit Hilfe von (7-1) berechnen.

$$\pi_l = \frac{\prod_{j=1}^g \rho_j^{k_{jl}}}{G} \quad (7-8)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit  $\rho_{V,j}$  eines Kunden  $j$  entspricht der Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi_l$  in denen ein ankommender Kunde  $j$  abgewiesen wird.

$$\rho_{V,j} = \sum_{l \text{ mit } k_j \in \Phi_j} \pi_l \quad (7-9)$$

### 7.1.2 Verfahren nach PINSKY und CONWAY

PINSKY und CONWAY [40] haben den Ansatz von DZIONG und ROBERTS weiterentwickelt. Die Verlustwahrscheinlichkeiten werden nicht über die Zustandswahrscheinlichkeiten, in denen der Kunde abgewiesen wird, sondern über eine veränderliche Normalisierungskonstante  $G$  bestimmt.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt sind die einzelnen Kanäle des Systems entweder belegt oder nicht. Den aktuellen Belegungszustand aller Kanäle beschreibt der Vektor  $\mathbf{u}$ , der sich aus  $s$  Einträgen zusammensetzt.

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r, \dots, u_s) \quad (7-10)$$

Es gilt:

$$u_r = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kanal } r \text{ belegt ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-11)$$

Die Normalisierungskonstante  $G(\mathbf{u})$  wird nun in Abhängigkeit von der Belegung des Systems ermittelt. Dafür wird zunächst der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r$  eingeführt. Der Vektor besteht aus  $s$  Einträgen, wobei alle Einträge Null sind und nur der Eintrag an Position  $r$  zu Eins gesetzt wird.

$$\mathbf{e}_r = (e_1, e_2, \dots, e_r, \dots, e_s) \quad (7-12)$$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-13)$$

Für die Berechnung der Werte  $G(\mathbf{u})$  verwenden PINSKY und CONWAY einen rekursiven Ansatz.

$$G(\mathbf{u} + \mathbf{e}_r) = G(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^g \rho_j \cdot \delta_{jr} \cdot (G(\mathbf{u} + \mathbf{e}_r - \delta_{j\cdot}) - G(\mathbf{u} - \delta_{j\cdot})) \quad (7-14)$$

$$G(\mathbf{0}) = 1 \quad (7-15)$$

$$G(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{wenn ein } u_r < 0 \quad (7-16)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeiten  $p_{v,j}$  werden unter Berücksichtigung der Normalisierungskonstanten  $G$  nach KELLY [28] ermittelt:

$$p_{v,j} = 1 - \frac{G(\mathbf{c} - \delta_{j\cdot})}{G(\mathbf{c})}. \quad (7-17)$$

Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, dass keine Aussagen über die Mengen  $\Omega_j$  oder  $\Phi_j$  zu treffen sind. Außerdem ist dieses Verfahren die Grundlage für das beschriebene Vorgehen im folgenden Kapitel, in dem komplexe Systeme betrachtet werden.

### 7.1.3 Zerlegung des Systems in Teilsysteme

Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten nach den beschriebenen Methoden aus den Kapiteln 7.1.1 und 7.1.2 stellt hohe Anforderungen an die Rechenleistung. Systeme mit vielen Bedienkanälen können aufgrund der stark ansteigenden möglichen Systemzustände nicht mehr gehandhabt werden. Aus diesem Grund haben CONWAY, PINSKY und TRIDANDAPANI [9] ein Verfahren entwickelt, das die Verlustwahrscheinlichkeiten von Teilsystem berechnet und anschließend durch Zusammenführen der Teilergebnisse exakte Verlustwahrscheinlichkeiten für das Gesamtsystem liefert. Das Gesamtsystem wird dabei in drei oder mehrere Teilsysteme aufgeteilt, wodurch der Rechenaufwand deutlich abnimmt. Im Folgenden wird das Verfahren für die Zerlegung in drei Teilsysteme beschrieben. Die Aufteilung in drei Teilsysteme ist für die Reduktion der Komplexität und die Verringerung des Rechenaufwandes für Gesamtfahrstraßenknoten in der Regel ausreichend. Eine Betrachtung der Komplexität erfolgt in Kapitel 7.4. Zur Methodik für eine Zerlegung in mehr als drei Teilsysteme wird auf [9] verwiesen.

Für die Zerlegung des Systems wird die Menge der Bedienkanäle  $R$  in drei Mengen  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  aufgeteilt. Die Aufteilung der Bedienkanäle hat derart zu erfolgen, dass Kunden, die mindestens einen Kanal in  $R_1$  und  $R_2$  nutzen, auch mindestens einen Kanal in  $R_0$  belegen. Andererseits müssen Kunden, die einen Kanal in  $R_0$  nutzen, nicht zwangsweise einen Kanal in  $R_1$  oder  $R_2$  belegen. Bei der Zerlegung eines Systems in seine Teilsysteme kann es also mehrere Möglichkeiten geben. Um den Aufwand gering zu halten, soll eine möglichst gleichmäßige Aufteilung der Bedienkanäle angestrebt werden. Für die Mengen von Bedienkanäle gelte:

$$R_0 = R - (R_1 \cup R_2) \text{ und} \quad (7-18)$$

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset. \quad (7-19)$$

Das Teilsystem  $R_0$  setzt sich aus  $s_0$  Bedienkanälen zusammen. Diese werden mit  $r_0 = 1 \dots s_0$  durchnummeriert. Die Teilsysteme  $R_1$  bzw.  $R_2$  bestehen aus  $s_1$  bzw.  $s_2$  Kanälen. Diese werden mit  $r_1 = 1 \dots s_1$  bzw. mit  $r_2 = 1 \dots s_2$  durchnummeriert. Die Kapazitätsvektoren  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  der Teilsystems sind

$$\mathbf{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, K, c_{0,r_0}, K, c_{0,s_0}) \quad (7-20)$$

$$\mathbf{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, K, c_{1,r_1}, K, c_{1,s_1}) \quad (7-21)$$



$$\mathbf{c}_2 = (c_{2,1}, c_{2,2}, K, c_{2,r_2}, K, c_{2,s_2}) \quad (7-22)$$

$$\text{mit } c_{0,r_0} = 1 \quad c_{1,r_1} = 1 \quad c_{2,r_2} = 1 \quad \forall r_0, r_1, r_2. \quad (7-23)$$

Die Vektoren  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  zeigen die Belegungen der einzelnen Kanäle innerhalb eines Teilsystems an.

$$\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, K, u_{0,r_0}, K, u_{0,s_0}) \quad (7-24)$$

$$u_{0,r_0} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kanal } r_0 \text{ belegt ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-25)$$

$$\mathbf{u}_1 = (u_{1,1}, u_{1,2}, K, u_{1,r_1}, K, u_{1,s_1}) \quad (7-26)$$

$$u_{1,r_1} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kanal } r_1 \text{ belegt ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-27)$$

$$\mathbf{u}_2 = (u_{2,1}, u_{2,2}, K, u_{2,r_2}, K, u_{2,s_2}) \quad (7-28)$$

$$u_{2,r_2} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kanal } r_2 \text{ belegt ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-29)$$

Kunden werden den drei Gruppen  $T_0$ ,  $T_1$  und  $T_2$  zugeordnet, wobei ein Kunde genau dann einer Gruppe zugeordnet wird, wenn er mindestens einen Kanal des Teilsystems belegt. Kunden aus der Menge  $T_0$  werden mit  $j_0 = 1 \dots g_0$  durchnummeriert.

$$T_0 = \{ j \mid \delta_{jr} > 0 \text{ für ein } r \in R_0 \} \quad (7-30)$$

$$T_1 = \{ j \mid \delta_{jr} > 0 \text{ für ein } r \in R_1 \} \quad (7-31)$$

$$T_2 = \{ j \mid \delta_{jr} > 0 \text{ für ein } r \in R_2 \} \quad (7-32)$$

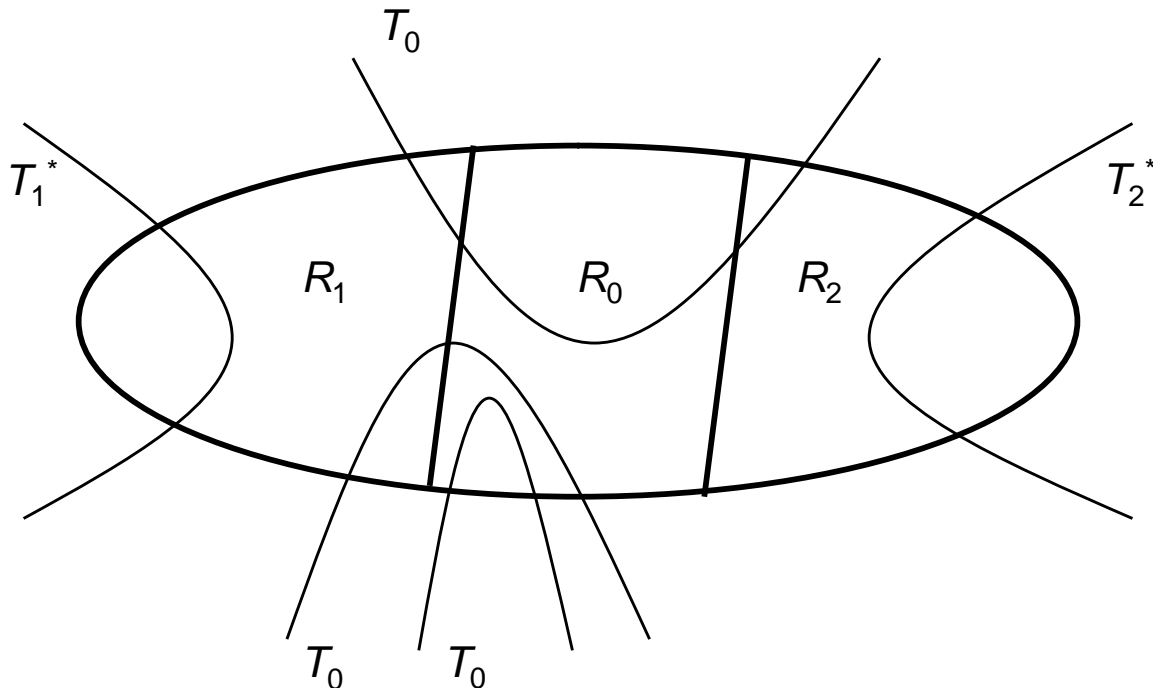
Im weiteren Verlauf werden nun zunächst die beiden Teilsysteme  $R_1$  und  $R_2$  analysiert. Die betrachteten Kunden für diese Teilsysteme ( $T_1^*$  und  $T_2^*$ ) bilden sich aus den Mengen  $T_1$  und  $T_2$ , die jeweils noch um die Kunden reduziert werden, die in  $T_0$  enthalten sind.

$$T_1^* = \{ j \mid j \in T_1, j \notin T_0 \} \quad (7-33)$$

$$T_2^* = \{ j \mid j \in T_2, j \notin T_0 \} \quad (7-34)$$

Kunden aus der Menge  $T_1^*$  werden mit  $j_1 = 1 \dots g_1$  durchnummeriert. Kunden aus der Menge  $T_2^*$  werden mit  $j_2 = 1 \dots g_2$  durchnummeriert.

Abb. 18 zeigt beispielhaft die Zerlegung eines Systems in die Mengen  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  und die Belegung durch die Kunden aus den Mengen  $T_0$ ,  $T_1^*$  und  $T_2^*$ .



**Abb. 18: Zerlegung in drei Teilsysteme**

Bei dem weiteren Vorgehen werden zunächst nur die Teilbereiche Eins und Zwei betrachtet und für diese die Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  rekursiv ermittelt. Durch das Zusammenführen der Teilergebnisse können letztendlich exakte Aussagen über das Gesamtsystem getroffen werden.

Die Belegungsmatrix  $\Delta_1$  zeigt die Kanäle im Teilsystem  $R_1$  an, die durch einen Kunden  $j$  belegt werden.

$$\Delta_1 = (\delta_{1,jr_1}) \quad (7-35)$$

$$\delta_{1,jr_1} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kunde } j \text{ den Kanal } r_1 \text{ belegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-36)$$

Die  $j$ -te Zeile der Belegungsmatrix  $\Delta_1$  beschreibt die Anforderung  $\mathbf{o}_1(j)$  des Kunden  $j$  in dem Teilssystem  $R_1$ .

$$\mathbf{o}_1(j) = (\delta_{1,j1}, \delta_{1,j2}, \dots, \delta_{1,jr_1}, \dots, \delta_{1,js_1}) \quad (7-37)$$

Analog zeigt die Belegungsmatrix  $\Delta_2$  zeigt die Kanäle im Teilssystem  $R_2$  an, die durch einen Kunden  $j$  belegt werden.

$$\Delta_2 = (\delta_{2,jr_2}) \quad (7-38)$$

$$\delta_{2,jr_2} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kunde } j \text{ den Kanal } r_2 \text{ belegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-39)$$

Wieder beschreibt die  $j$ -te Zeile der Belegungsmatrix  $\Delta_2$  die Anforderung  $\mathbf{o}_2(j)$  des Kunden  $j$  in dem Teilssystem  $R_2$ .

$$\mathbf{o}_2(j) = (\delta_{2,j1}, \delta_{2,j2}, \dots, \delta_{2,jr_2}, \dots, \delta_{2,js_2}) \quad (7-40)$$

Zur Bestimmung der Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  werden zunächst die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{r_1}$  und  $\mathbf{e}_{r_2}$  eingeführt. Der Vektor  $\mathbf{e}_{r_1}$  besteht aus  $s_1$  Einträgen, wobei alle Einträge Null sind, nur der Eintrag an Position  $r_1$  wird zu Eins gesetzt.

$$\mathbf{e}_{r_1} = (e_1, e_2, \dots, e_{s_1}) \quad (7-41)$$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = r_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-42)$$

Der Vektor  $\mathbf{e}_{r_2}$  besteht aus  $s_2$  Einträgen, wobei alle Einträge Null sind, nur der Eintrag an Position  $r_2$  wird zu Eins gesetzt.

$$\mathbf{e}_{r_2} = (e_1, e_2, \dots, e_{s_2}) \quad (7-43)$$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = r_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-44)$$

Die Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  der Teilsysteme werden rekursiv ermittelt.

$$G_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_{r_1}) = G_1(\mathbf{u}_1) + \sum_{j \in T_1^*} \rho_j \cdot \delta_{1,jr_1} \cdot (G_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{e}_{r_1} - \mathbf{o}_1(j)) - G_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{o}_1(j))) \quad (7-45)$$

$$G_1(\mathbf{0}) = 1 \quad (7-46)$$

$$G_1(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{wenn ein } u_r < 0 \quad (7-47)$$

Die Ermittlung von  $G_2$  gestaltet sich dementsprechend.

$$G_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_{r_2}) = G_2(\mathbf{u}_2) + \sum_{j \in T_2^*} \rho_j \cdot \delta_{2,jr_2} \cdot (G_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{e}_{r_2} - \mathbf{o}_2(j)) - G_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{o}_2(j))) \quad (7-48)$$

$$G_2(\mathbf{0}) = 1 \quad (7-49)$$

$$G_2(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{wenn ein } u_r < 0 \quad (7-50)$$

Bevor die Normalisierungskonstante  $G$  für das Gesamtsystem bestimmt werden kann, sind einige Vorbereitungen durchzuführen. Es wird dazu ein Hilfsvektor  $\mathbf{a}_0(r)$  benötigt, der die Anforderungen an die Kanäle des Gesamtsystems durch Kunden  $j_0$  aus der Menge  $T_0$  beschreibt. Für jeden Kanal  $r$  ist ein Hilfsvektor  $\mathbf{a}_0(r)$  aufzustellen.

$$\mathbf{a}_0(r) = (\delta_{1r}, \delta_{2r}, K, \delta_{j_0r}, K, \delta_{g_0r}) \quad (7-51)$$

mit

$$\delta_{j_0r} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kunde } j_0 \text{ den Kanal } r \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-52)$$

Für Kunden aus der Menge  $T_0$  sind die möglichen Teilkombinationen  $\mathbf{tk}$  zu bilden. Eine mögliche Teilkombination liegt dann vor, wenn alle Kunden einer Teilkombination zeitgleich bedient werden können. Die Anzahl aller möglichen Teilkombinationen sei  $m_0$ . Teilkombinationen werden mit  $l_0 = 1 \dots m_0$  durchnummeriert.

Die Teilkombination  $\mathbf{tk}_{l_0}$  beschreibt eine Teilmenge aller Kunden wie folgt:

$$\mathbf{tk}_{l_0} = (\mathbf{tk}_{1l_0}, \mathbf{tk}_{2l_0}, K, \mathbf{tk}_{j_0l_0}, K, \mathbf{tk}_{g_0l_0}) \quad (7-53)$$

$$\mathbf{tk}_{j_0l_0} = \begin{cases} 1 & \text{wenn in der Teilkombination } l_0 \text{ ein Kunde } j_0 \text{ enthalten ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-54)$$

Damit es sich bei der Teilkombination  $l_0$  um eine mögliche Teilkombination handelt, muss die folgende Bedingung eingehalten werden

$$\mathbf{a}_0(r) \cdot \mathbf{tk}_{l_0}^T \leq 1 \quad \forall r. \quad (7-55)$$

Für jede Teilkombination  $\mathbf{tk}$  ist ein BOOLEscher Hilfsvektor  $\mathbf{x}_1(\mathbf{tk})$  aufzustellen. Dieser Vektor hat  $s_1$  Einträge und zeigt die Belegungen der Kanäle im Teilsystem  $R_1$  durch die Teilkombination  $\mathbf{tk}$  an.

$$\mathbf{x}_1(\mathbf{tk}) = (\mathbf{a}_0(1) \cdot \mathbf{tk}^T, \mathbf{a}_0(2) \cdot \mathbf{tk}^T, K, \mathbf{a}_0(r_1) \cdot \mathbf{tk}^T, K, \mathbf{a}_0(s_1) \cdot \mathbf{tk}^T) \quad (7-56)$$

Der Hilfsvektor  $\mathbf{x}_2(\mathbf{tk})$  ist für das Teilsystem  $R_2$  nach dem identischen Vorgehen aufzustellen.

$$\mathbf{x}_2(\mathbf{tk}) = (\mathbf{a}_0(1) \cdot \mathbf{tk}^T, \mathbf{a}_0(2) \cdot \mathbf{tk}^T, K, \mathbf{a}_0(r_2) \cdot \mathbf{tk}^T, K, \mathbf{a}_0(s_2) \cdot \mathbf{tk}^T) \quad (7-57)$$

Nun kann unter Berücksichtigung der Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  die Normalisierungskonstante  $G$  für das Gesamtsystem bestimmt werden.

$$G(\mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{tk}} \left[ G_1(\mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_1(\mathbf{tk})) \cdot G_2(\mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_2(\mathbf{tk})) \cdot \prod_{j \in T_0} \rho_j^{tk_j} \right] \quad (7-58)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi$  können mit Hilfe der Normalisierungskonstanten  $G$ ,  $G_1$  und  $G_2$  berechnet werden.

$$\pi_0(\mathbf{tk}) = \frac{G_1(\mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_1(\mathbf{tk})) \cdot G_2(\mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_2(\mathbf{tk}))}{G(\mathbf{c})} \cdot \prod_{j \in T_0} \rho_j^{tk_j} \quad (7-59)$$

Zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten werden zunächst die Hilfsgrößen  $B_1(j, \mathbf{c}_1)$  und  $B_2(j, \mathbf{c}_2)$  für die Teilssysteme Eins und Zwei ermittelt.

$$B_1(j, \mathbf{c}_1) = 1 - \frac{G_1(\mathbf{c}_1 - \mathbf{o}_1(j))}{G_1(\mathbf{c}_1)}. \quad (7-60)$$

$$B_2(j, \mathbf{c}_2) = 1 - \frac{G_2(\mathbf{c}_2 - \mathbf{o}_2(j))}{G_2(\mathbf{c}_2)}. \quad (7-61)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeiten  $p_{V,j}$  für einen Kunden  $j$  aus der Menge  $T_1^*$  berechnen sich nach

$$p_{V,j} = \sum_{\mathbf{tk}} \pi_0(\mathbf{tk}) \cdot B_1(j, \mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_1(\mathbf{tk})), \quad (7-62)$$

die Verlustwahrscheinlichkeiten für einen Kunden  $j$  aus der Menge  $T_2^*$  entsprechend nach

$$\rho_{V,j} = \sum_{\mathbf{tk}} \pi_0(\mathbf{tk}) \cdot B_2(j, \mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_2(\mathbf{tk})). \quad (7-63)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeiten für einen Kunden  $j$  aus der Menge  $T_0$  bestimmt sich nach

$$\rho_{V,j} = \sum_{\mathbf{tk}} \pi_0(\mathbf{tk}) \cdot [1 - \alpha_j(\mathbf{tk}) + \alpha_j(\mathbf{tk}) \cdot (B_1(j, \mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_1(\mathbf{tk})) + B_2(j, \mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_2(\mathbf{tk})) - B_1(j, \mathbf{c}_1 - \mathbf{x}_1(\mathbf{tk})) \cdot B_2(j, \mathbf{c}_2 - \mathbf{x}_2(\mathbf{tk})))] \quad (7-64)$$

mit

$$\alpha_j(\mathbf{tk}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathbf{a}_0(r) \cdot \mathbf{tk}^T = 0 \quad \forall r \in \{r \mid \delta_{jr} = 1\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7-65)$$

## 7.2 Bestimmung der Wartewahrscheinlichkeiten

In erster Näherung kann für die Wartewahrscheinlichkeit  $\rho_{W,j}$  die Verlustwahrscheinlichkeit  $\rho_{V,j}$  angesetzt werden.

$$\rho_{W,j} \approx \rho_{V,j} \quad (7-66)$$

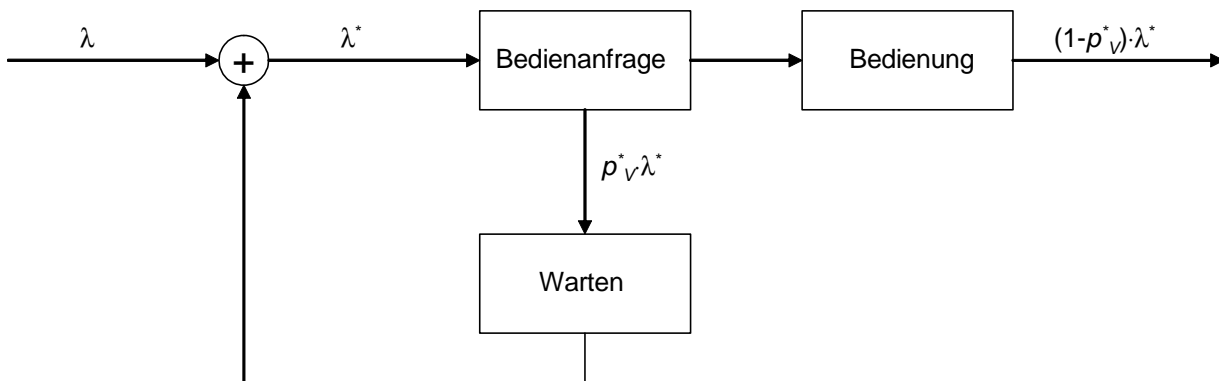
In der Eisenbahnbetriebswissenschaft hat POTTHOFF zur Abschätzung der Wartewahrscheinlichkeiten einer Gleisgruppe ebenfalls die Verlustwahrscheinlichkeiten verwendet [41]. Für kleine Belegungsgrade liefert diese Näherung plausible Werte. Bei mittleren und besonders bei großen Belegungsgrade treten jedoch starke Abweichungen auf.

## 7.3 Bestimmung der planmäßigen Wartezeiten

Bei dem Übergang von einem Verlustsystem zu einem Wartesystem verlassen abgewiesene Forderungen nicht mehr das System, sondern verbleiben so lange im System, bis sie bedient werden können. Die Wartezeit eines Kunden ist die Differenz zwischen dem Beginn seiner Bedienung und seiner Ankunftszeit.

MITRA und WEINBERGER [32] liefern eine Approximation zur Bestimmung der Wartezeit für Systeme in denen Kunden zunächst geblockt werden, das System aber nicht verlassen, sondern sich anschließend wieder in den Forderungsstrom einreihen. Mit der Wahrscheinlichkeit  $p_V$  können Kunden bei Ihrer Ankunft nicht bedient werden, da mindestens ein benötigter Kanal belegt ist. Diese abgewiesenen Kunden müssen warten und reihen sich wieder in den Ankunftsstrom ein. Dadurch vergrößert sich die Ankunftsrate  $\lambda$ . Die erhöhte Ankunftsrate wird mit  $\lambda^*$  bezeichnet. Mit der Wahrscheinlichkeit  $1-p_V^*$

werden nun die Kunden bedient. Die Ausgangsrate des Systems ist entsprechend  $(1-p_v^*) \cdot \lambda^*$ . Abb. 19 zeigt eine Systemskizze des hier beschriebenen Modells.



**Abb. 19: Abgewiesene Forderungen reihen sich wieder in den Ankunftsstrom ein**

Die Approximation bei diesem Modell besteht in der Annahme, dass auch der erhöhte Forderungsstrom MARKOVsch ist. Die erhöhte Ankunftsrate eines Kunden  $j$  sei  $\lambda_j^*$ .

Da bei stationärem Zustand die Ankunftsrate  $\lambda_j$  eines Kunden  $j$  der Ausgangsrate dieses Kunden entsprechen muss, gilt

$$\lambda_j = (1 - p_{v,j}^*) \cdot \lambda_j^* . \quad (7-67)$$

Für jeden Kunden  $j$  kann eine Gleichung nach (7-67) aufgestellt werden. Die erhöhte Verlustwahrscheinlichkeit  $p_{v,j}^*$  ist von der erhöhten Ankunftsrate  $\lambda_j^*$  des Kunden  $j$  und unter Umständen auch noch von erhöhten Ankunftsraten weiterer Kunden abhängig. Insgesamt stehen  $g$  Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten  $\lambda_1^*$  bis  $\lambda_g^*$  zur Verfügung.

Durch das Lösen des aufgestellten Gleichungssystems ergibt sich für jeden Kunden die erhöhte Ankunftsrate  $\lambda_j^*$  mit dem nach MITRA und WEINBERGER [32] der Erwartungswert der planmäßigen Wartezeit  $E T_{WF}$  für einen Kunden näherungsweise bestimmt werden kann. Es folgt:

$$E T_{WF}(j) = \frac{\hat{V}B^2(j) + 1}{2} \cdot \hat{b}(j) \cdot \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right) . \quad (7-68)$$

Bei der Berechnung der mittleren Wartezeit geht der Variationskoeffizient der Bedienzeiten  $\hat{V}B$  ein. Dieser lässt sich aus der Varianz  $\hat{V}ar$  und dem Mittelwert  $\hat{b}$  der Bedienzeit bestimmen.

$$\hat{V}B(j) = \frac{\sqrt{\hat{V}ar(j)}}{\hat{b}(j)} \quad (7-69)$$

Prioritäten werden in der Eisenbahnbetriebswissenschaft durch Ränge ausgedrückt. Bei der Wartezeitberechnung werden unterschiedliche Ränge mit Hilfe der so genannten Dispositionszeiten  $t_d$  berücksichtigt, die eine Vergrößerung der Streuung der Bedienzeiten bewirken [45]. Ein Kunde  $j$  besitzt eine Rangziffer  $Rg_j$ . Ist die Rangziffer eines Kunden  $i$  kleiner als jene des Kunden  $j$ , so hat der Kunde  $i$  Vorrang. Bei identischer Rangziffer ergibt sich Gleichrang, ansonsten Nachrang.

Bei der Berechnung der Varianz  $Var(j)$  für einen Kunden  $j$  werden nur jene Kunden betrachtet, die mit dem Kunden  $j$  einen Ausschluss haben.

$$\hat{n}_i(j) = a_{ij} \cdot n_i \quad (7-70)$$

$$\hat{n}_{ges}(j) = \sum_{i=1}^g \hat{n}_i(j) \quad (7-71)$$

Somit ergibt sich für die Varianz der Bedienzeiten

$$\hat{V}ar(j) = \sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \frac{\hat{n}_v(j) \cdot \hat{n}_w(j)}{\hat{n}_{ges}^2(j)} \cdot \left( \frac{1}{\mu_v} + t_{d,vw} - \hat{b}(j) \right)^2 \quad (7-72)$$

mit den Dispositionszeiten

$$t_{d,vw} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_w} & \text{wenn } Rg_v < Rg_w, \\ 0 & \text{wenn } Rg_v = Rg_w, \\ -\frac{1}{\mu_v} & \text{wenn } Rg_v > Rg_w, \end{cases} \quad (7-73)$$

und der mittleren Belegungszeit

$$\hat{b}(j) = \sum_{i=1}^g \frac{\hat{n}_i(j)}{\hat{n}_{ges}(j) \cdot \mu_i}. \quad (7-74)$$



## 7.4 Komplexität

Die Anzahl der Bedienkanäle  $s$  und die Anzahl der Kunden  $g$  seien gegeben. Die Belegungsmatrix  $\Delta$  ist eine  $g \times s$  Matrix. Die Anzahl der möglichen Kombinationen  $m$  ist von den Anforderungen  $\delta_j$  abhängig. Die maximale Anzahl an möglichen Kombinationen  $m_{\max}$  ergibt sich dann, wenn jede Kundenkombination eine mögliche Kombination ist. Für die maximale Anzahl an Kombinationen gilt daher

$$m_{\max} \leq 2^g.$$

Bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten nach DZIONG und ROBERTS (Kap. 7.1.1) sind die möglichen Kundenkombinationen  $m$  zu bilden und für jede Kombination die Zustandswahrscheinlichkeit  $\pi_i$  zu ermitteln. Der größte Rechenaufwand ergibt sich bei der Bestimmung der Normalisierungskonstanten  $G$ . Bei dem Vorgehen nach DZIONG und ROBERTS gilt für den Rechenaufwand  $O_{DR}$  in etwa

$$O_{DR} \approx m \cdot g. \quad (7-75)$$

Bei dem Ansatz nach PINSKY und CONWAY (Kap. 7.1.2) wird die Normalisierungskonstante  $G(\mathbf{c})$  anhand einer Iteration bestimmt. Die Anzahl der Iterationsschritte ist jedoch nicht von der Kundenanzahl  $g$ , sondern von der Anzahl der Bedienkanäle  $s$  abhängig. Da ein Bedienkanal entweder belegt oder frei sein kann, ergeben sich für das Gesamtsystem  $2^s$  Möglichkeiten, anhand derer die Belegungen beschrieben werden können. Für den Rechenaufwand  $O_{PC}$  der Iteration nach PINSKY und CONWAY gilt daher

$$O_{PC} \approx 2^s. \quad (7-76)$$

Die Anzahl der möglichen Kundenkombinationen übersteigt die Anzahl der möglichen Belegungszustände in der Regel. Um dies zu belegen werden beispielhaft drei große Eisenbahnknoten im deutschen Netz analysiert. In der Tab. 3 sind die Anzahl der Bedienstellen und der Kundentypen für die Knoten Koblenz Hbf, Darmstadt Hbf und Bebra Hbf dargestellt. Wenngleich die Anzahl der Kundentypen bei jedem neuen Betriebsprogramm variieren kann, lässt sich anhand der Daten belegen, dass die Anzahl der Kundentypen die Anzahl der Bedienstellen bei weitem übersteigt.

	GFK 1		GFK 2	
	Anzahl Bedienstellen	Anzahl Kundentypen	Anzahl Bedienstellen	Anzahl Kundentypen
Koblenz	15	54	15	48
Darmstadt	6	26	15	49
Bebra	7	95	10	90

**Tab. 3: Anzahl Bedienstellen und Bedienkanäle von Gesamtfahrstraßenknoten**

Damit kann für den Rechenaufwand zur Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeiten folgende Beziehung festgehalten werden:

$$O_{PC} \ll O_{DR} \quad (7-77)$$

Jedoch können in der Praxis auch Gesamtfahrstraßenknoten mit sehr vielen Bedienstellen vorkommen. Dies ist dann der Fall, wenn an einen Gesamtfahrstraßenknoten eine Vielzahl von Strecken angebinden ist, im Gesamtfahrstraßenknoten viele Fahrmöglichkeiten vorhanden sind und die Gleisgruppe des Knotens über viele Gleise verfügt. In diesen Fällen bietet sich eine Zerlegung des Systems in drei Teilsysteme nach dem Verfahren von CONWAY, PINSKY und TRIDANDAPANI an (Kap. 7.1.3).

Für jedes Teilsystem muss dann eine Normalisierungskonstante bestimmt werden. Bei der vereinfachenden Annahme, dass sich bei der Zerlegung in drei Bereiche jedes Teilsystem aus  $s$ -halben Bedienkanälen zusammensetzt, ergibt sich für den Rechenaufwand  $O_{CPT}$

$$O_{CPT} \approx 3 \cdot 2^{0,5 \cdot s} \quad (7-78)$$

Durch die Zerlegung des Systems in drei Teilsysteme beträgt der Rechenaufwand im Verhältnis also nur noch

$$\frac{O_{CPT}}{O_{PC}} = \frac{3 \cdot 2^{0,5 \cdot s}}{2^s} = \frac{3}{2^{0,5 \cdot s}} \quad (7-79)$$

Bei  $s = 10$  Bedienkanälen beläuft sich der Rechenaufwand nach Zerlegung nur noch auf 9,4 %, bei  $s = 20$  Bedienkanälen bereits nur noch auf 0,3 %.

Der Aufwand zur Ermittlung der planmäßigen Wartezeiten nach Kap. 7.3 beschränkt sich auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit  $g$  Unbekannten.

Für die Berechnung der Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten können ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit Kunden mit denselben Anforderungen  $\delta_j$  zusammengefasst werden. Es muss also für die Kunden  $a$  und  $b$

$$\delta_a = \delta_b \quad (7-80)$$

gelten. Die beiden Kunden  $a$  und  $b$  werden dann zu einem Kunden  $j$  zusammengefasst. Die Ankunfts- und die Bedienrate des zusammengefassten Kunden  $j$  berechnet sich nach

$$\lambda_j = \lambda_a + \lambda_b \quad (7-81)$$

$$\mu_j = \frac{\lambda_j}{\rho_a + \rho_b} \quad (7-82)$$

Bei der Berechnung der Wartezeiten müssen die Kunden einzeln betrachtet werden, da dort die Streuung der Bedienzeiten berücksichtigt wird.

## 8 Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten

Ein analytisches Verfahren zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten von Zügen auf Eisenbahnstrecken hat SCHWANHÄÜßER bereits 1974 veröffentlicht [44]. Das Verfahren wurde im EDV-Tool STRELE [48] implementiert, so dass die Formel zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten oftmals auch als die STRELE-Formel bezeichnet wird. Die STRELE-Formel lautet

$$E T_{WB\_Strecke} = \left( p_{VE} - \frac{p_{VE}^2}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VE}^2}{\bar{t}_p + \bar{t}_{VE} \cdot \left( 1 - e^{-\bar{z}/\bar{t}_{VE}} \right)} \cdot \left[ p_g \cdot \left( 1 - e^{-\bar{z}_g/\bar{t}_{VE}} \right)^2 + (1 - p_g) \cdot \frac{\bar{z}_v}{\bar{t}_{VE}} \cdot \left( 1 - e^{-2 \cdot \bar{z}_v/\bar{t}_{VE}} \right) + \frac{\bar{z}}{\bar{t}_p} \cdot \left( 1 - e^{-\bar{z}/\bar{t}_{VE}} \right)^2 \right] \quad (8-1)$$

mit:

$p_{VE}$  Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Einbruchsverspätung,

$\bar{t}_{VE}$  Mittlere Einbruchsverspätung der verspäteten Züge,

$p_g$  Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines gleichrangigen Zugfolgefalls,

$\bar{t}_p$  Mittlere Pufferzeit,

$\bar{z}$  Mittlere Mindestzugfolgezeit,

$\bar{z}_g$  Mittlere Mindestzugfolgezeit der gleichrangigen Zugfolgefälle,

$\bar{z}_v$  Mittlere Mindestzugfolgezeit der rangunterschiedlichen Zugfolgefälle.

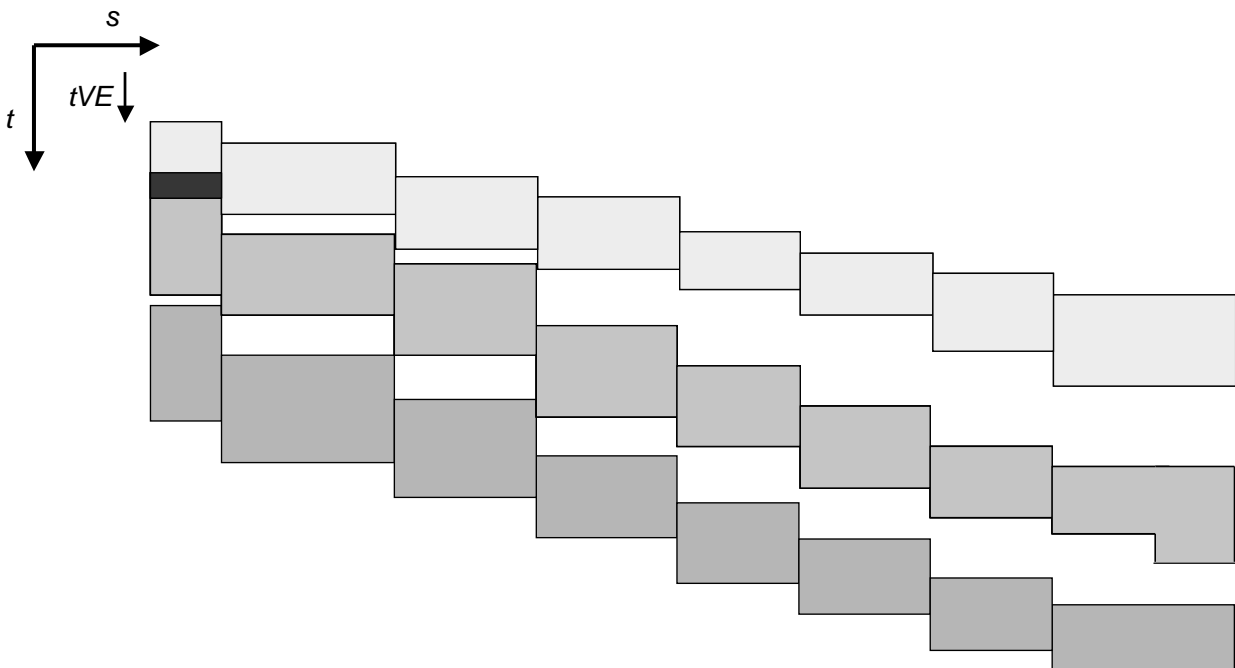
Eine Erweiterung des Verfahrens zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten auf Gesamtfahrstraßenknoten ist unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 7 möglich.

Zunächst werden die unterschiedlichen Arten von Verspätungen betrachtet. Eine Verspätung ist die Zeit, die ein Zug an einem bestimmten Ort von seiner planmäßigen Zeitlage abweicht. Eine Einbruchsverspätung  $t_{VE}$  ist die Verspätung eines Zuges, die beim Einbruch in einem Untersuchungsraum festgestellt wird. Folgeverspätungen  $t_{VF}$  entstehen durch Konflikte mit anderen Zügen. Dies können Belegungskonflikte oder gehaltene Anschlüsse (Anschlusskonflikte) sein. Die Folgeverspätungen werden als außerplan-

mäßige Wartezeiten bezeichnet. Bei einem vollständig pünktlichen Betrieb würden keine außerplanmäßigen Wartezeiten entstehen.

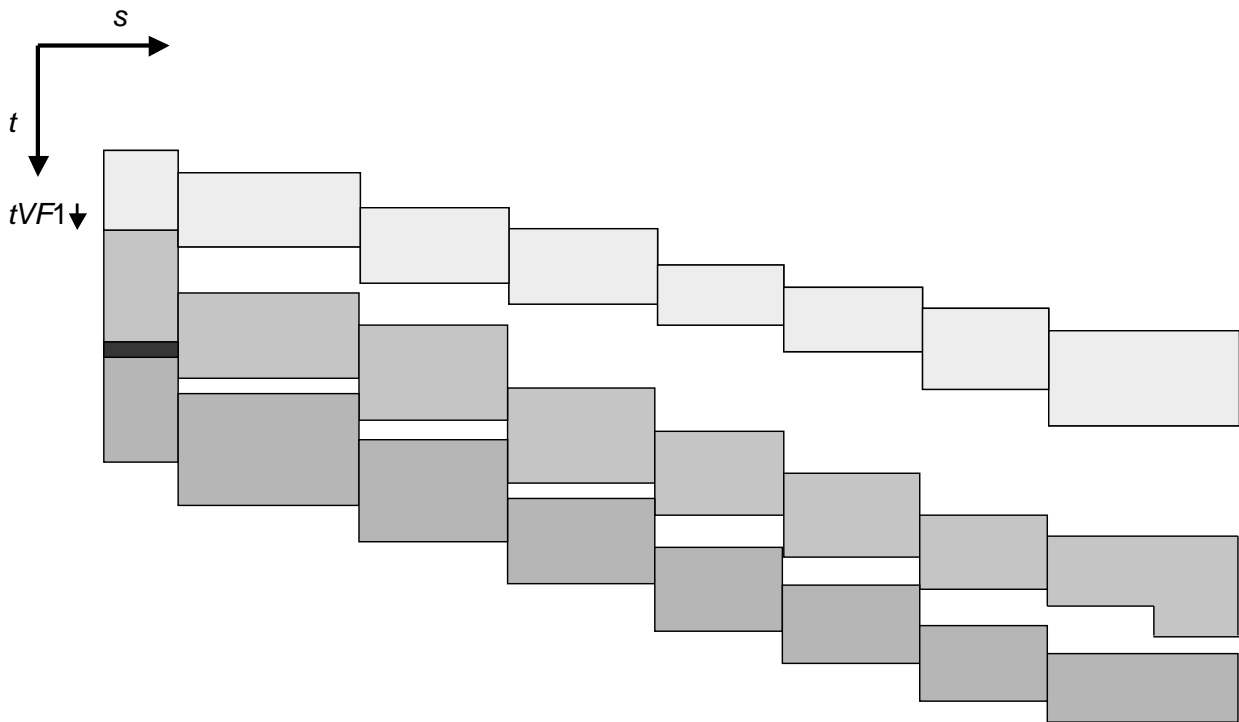
SCHWANHÄUßER ermittelt die Folgeverspätungen von Zügen zunächst anhand eines Zwei-Zug-Modells. Dazu bestimmt er unter Beachtung der Ränge die Wartezeiten, die bei einer zufälligen Verspätung der Züge aufgrund von Belegungskonflikten auftreten. Beim Übergang von zwei Zügen auf die Gesamtheit aller Zugfahrten erhält SCHWANHÄUßER die Wartezeiten ersten Grades. Die Wartezeiten ersten Grades enthalten nur die Folgeverspätungen, die zwischen dem verspäteten Zug und einem weiteren Zug übertragen werden.

In langen Warteschlangen führen Folgeverspätungen ersten Grades wiederum zu Folgeverspätungen. Diese Folgeverspätungen definiert SCHWANHÄUßER als Wartezeiten höheren Grades. In Abb. 20 bis Abb. 22 sind anhand eines Beispiels mit drei gleichrangigen Zügen die verschiedenen Arten von Folgeverspätungen dargestellt. Zunächst besitzt ein Zug – hier der erste Zug – eine Einbruchsverspätung  $t_{VE}$ .



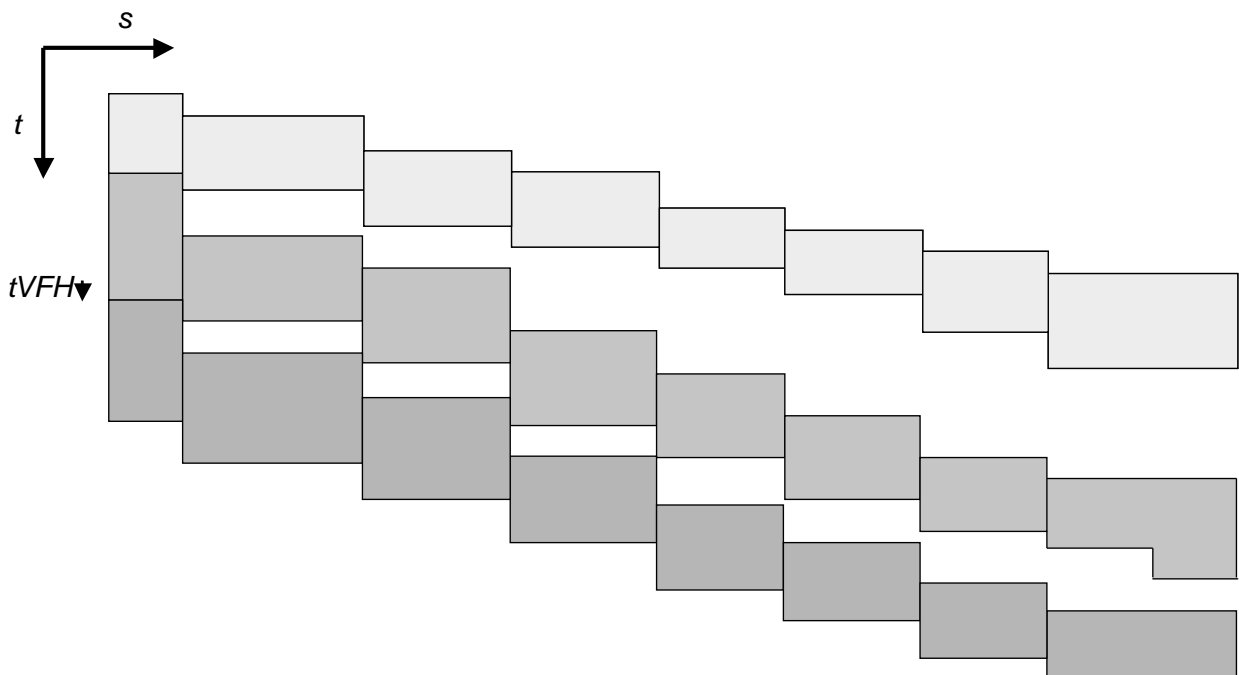
**Abb. 20: Einbruchsverspätung  $t_{VE}$**

Durch die Einbruchsverspätung entsteht ein Belegungskonflikt mit dem folgenden Zug. Dieser Konflikt wird durch Verschieben der zweiten Sperrzeitentreppe gelöst. Daraus resultiert eine Folgeverspätung ersten Grades  $t_{VF1}$ . Dadurch ergibt sich jedoch ein weiterer Belegungskonflikt zwischen dem zweiten und dem dritten Zug.



**Abb. 21: Folgeverspätung ersten Grades  $t_{VF1}$**

Der neu entstandene Konflikt kann durch eine Verschiebung der dritten Zugfahrt gelöst werden. Dabei ergibt sich eine weitere Folgeverspätung, die als Folgeverspätung höheren Grades  $t_{VFH}$  definiert ist.



**Abb. 22: Folgeverspätung höheren Grades  $t_{VFH}$**

Die Anwendung der STRELE-Formel unterstellt als Eingangsbedingung neben einem konfliktfreien Fahrplan, dass die Pufferzeiten exponentialverteilt sind. Bei der Untersuchung von Gesamtfahrstraßenknoten überlagern sich in der Regel eine Vielzahl von Verkehrsströmen aus unterschiedlichen Richtungen. FISCHER und HERTEL [17] haben nachgewiesen, dass sich bei einer Vereinigung von mehreren Verkehrsströmen näherungsweise ein MARKOVscher Forderungsstrom ergibt. Daher kann bei der Betrachtung eines Gesamtfahrstraßenknotens von exponentialverteilten Pufferzeiten ausgegangen werden.

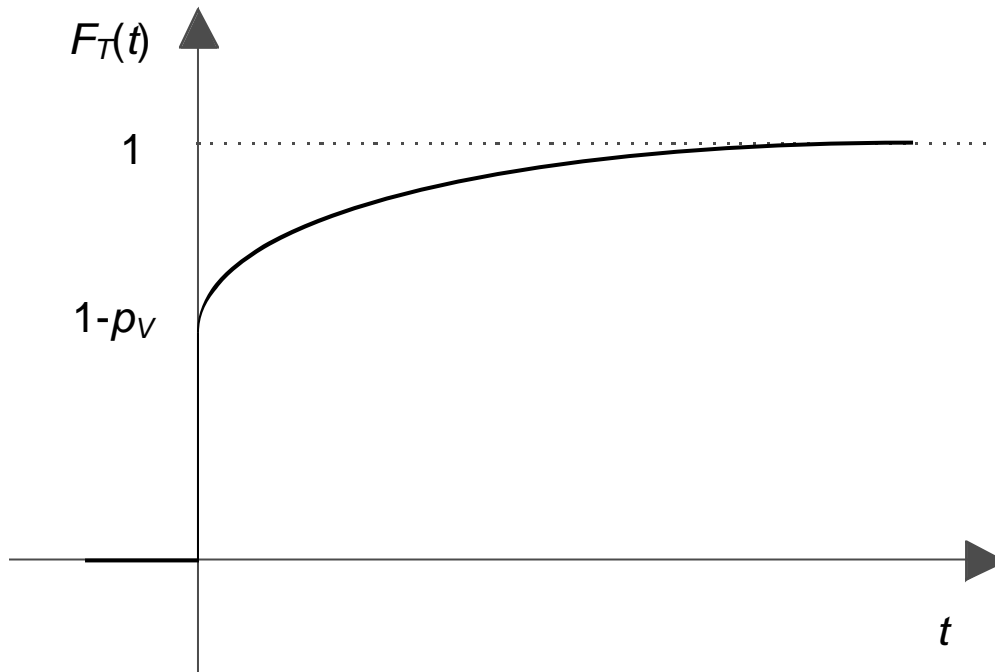
Zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten müssen die Einbruchsverspätungen der Züge berücksichtigt werden. Diese werden mit der so genannten Verspätungsverteilung modelliert. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist weder eine rein stetige noch eine rein diskrete Verteilung, sondern eine Mischung aus beiden.

Neben den pünktlichen Zügen können Verspätungen oder Verfrühungen auftreten. Verfrühungen entstehen z. B. durch „Vor-Plan-Abfahrten“ von Güterzügen, weil sich dadurch im lokalen Bereich Optimierungen ergeben. Verfrühungen stellen aber eine Abweichung von der Richtgröße Fahrplan dar und führen oftmals in nachgelagerten Betriebsstellen zu Folgeverspätungen. Aus Sicht des Qualitätssicherungsprozesses ist daher das „Vor-Plan-Abfahren“ zu vermeiden.

Bei der Verspätungsverteilung werden daher keine Verfrühungen berücksichtigt. Die negativen Werte der Verteilung werden zu Null gesetzt. Die Verteilungsfunktion der Verspätungsverteilung ist folgendermaßen definiert:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - p_V \cdot e^{-t/\bar{t}_{VE}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8-2)$$

Der Anteil der verspäteten Züge wird mit der Variablen  $p_V$  beschrieben. Die Verspätungen dieser Züge werden mit einer Exponentialverteilung mit dem Parameter  $\bar{t}_{VE}$  modelliert. Die Abb. 23 zeigt beispielhaft den Verlauf der Verteilungsfunktion der Verspätungsverteilung.



**Abb. 23: Die Verteilungsfunktion der Verspätungsverteilung**

SCHWANHÄÜßER [44] hatte bereits 1974 diese Verteilungsfunktion aufgestellt. Durch eine Reihe weiterer Arbeiten (HEISTER 1978 [23], HERMANN 1996 [24] sowie WENDLER und NAEHRIG 2004 [56]) wurde die Anwendbarkeit dieser Funktion bestätigt.

## 8.1 Wartezeiten ersten Grades

In den folgenden Kapiteln zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten werden anstelle der Begriffe Kundentyp und Kunde die Synonyme „Modellzug“ und „Zug“ aus der Eisenbahnbetriebswissenschaft verwendet.

SCHWANHÄÜßER hat in [44] folgende Formel zur Berechnung der Folgeverspätungen ersten Grades auf Strecken aufgestellt:

$$ET_{WB1\_Strecke} = \left( p_{VE} - \frac{p_{VE}^2}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VE}^2 \cdot \left[ p_g \cdot \left( 1 - e^{-\bar{z}_g / \bar{t}_{VE}} \right)^2 + (1 - p_g) \cdot \frac{\bar{z}_v}{\bar{t}_{VE}} \cdot \left( 1 - e^{-2 \cdot \bar{z}_v / \bar{t}_{VE}} \right) \right]}{\bar{t}_p + \bar{t}_{VE} \cdot \left( 1 - e^{-\bar{z} / \bar{t}_{VE}} \right)} \quad (8-3)$$

Die Grundvoraussetzungen zur Bestimmung der Wartezeiten ersten Grades ändern sich bei der Betrachtung eines Gesamtfahrstraßenknotens anstelle einer Strecke nicht. In beiden Fällen wird von einem Zwei-Zug-Modell ausgegangen und daher nur jene Wartezeit betrachtet, die von einem Zug auf einen weiteren Zug übertragen wird. Anstelle der Verspätungskennwerte am Einbruch werden für die Berechnung der außer-



planmäßigen Wartezeiten die Werte am Gesamtfahrstraßenknoten verwendet. Diese sind die Wahrscheinlichkeit einer Verspätung am Gesamtfahrstraßenknoten  $p_{VGFK,i}$  und die mittlere Verspätung der verspäteten Züge am Gesamtfahrstraßenknoten  $\bar{t}_{VGFK,i}$ . Für jeden Modellzug müssen diese Werte bekannt sein. Diese Werte können z. B. anhand einer Auswertung von Verspätungsdaten ermittelt werden [56].

Als Eingangsgrößen zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten im Gesamtfahrstraßenknoten sind mehrere Werte den geänderten Randbedingungen anzupassen und müssen daher neu ermittelt werden. Die mittlere Pufferzeit eines Modellzuges  $\bar{t}_p(i)$  unter alleiniger Berücksichtigung der Zugfahrten  $n_i$  berechnet sich aus der Differenz der Kehrwerte seiner Ankunfts- und Bedienrate.

$$\bar{t}_p(i) = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\mu_i} \quad (8-4)$$

Die mittlere Pufferzeit über alle Züge  $\bar{t}_{p,ges}(j)$ , die mit dem Zug  $j$  in Konflikt stehen, berechnet sich zu

$$\bar{t}_{p,ges}(j) = \left( \sum_{i=1}^g \frac{a_{ij}}{\bar{t}_p(i)} \right)^{-1}. \quad (8-5)$$

Bei der Berechnung der mittleren Belegungszeit werden nur jene Zugfahrten betrachtet, die mit dem Modellzug  $j$  einen Ausschluss haben.

$$\hat{n}_i(j) = a_{ij} \cdot n_i \quad (8-6)$$

$$\hat{n}_{ges}(j) = \sum_{i=1}^g \hat{n}_i(j) \quad (8-7)$$

Die mittlere Belegungszeit  $\hat{b}(j)$  beträgt

$$\hat{b}(j) = \sum_{i=1}^g \frac{\hat{n}_i(j)}{\hat{n}_{ges}(j) \cdot \mu_i}. \quad (8-8)$$

Zur Bestimmung der mittleren Bedienzeit der gleichrangigen Zugfolgefälle  $\hat{b}_g(j)$  werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten für einen gleichrangigen Zugfolgefall  $v-w$   $\hat{p}_{g,vw}(j)$  ermittelt.

$$\hat{p}_{g,vw}(j) = \begin{cases} \frac{\hat{n}_v(j) \cdot \hat{n}_w(j)}{\hat{n}_{ges}^2(j)} & \text{wenn } Rg_v = Rg_w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8-9)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines gleichrangigen Zugfolgefalls über alle Züge  $\hat{p}_g(j)$  ist die Summe der zuvor in (8-9) bestimmten Wahrscheinlichkeiten.

$$\hat{p}_g(j) = \sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \hat{p}_{g,vw}(j). \quad (8-10)$$

Somit lässt sich die mittlere Belegungszeit bei Gleichrang nach

$$\hat{b}_g(j) = \frac{\sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \frac{\hat{p}_{g,vw}(j)}{\mu_v}}{\hat{p}_g(j)}. \quad (8-11)$$

berechnen. Ebenso werden die Wahrscheinlichkeiten für einen verschiedenrangigen Zugfolgefall  $\hat{p}_{v,vw}(j)$  und die mittlere Belegungszeit bei verschiedenen Rangziffern  $\hat{b}_v(j)$  bestimmt. Es gilt

$$\hat{p}_{v,vw}(j) = \begin{cases} \frac{\hat{n}_v(j) \cdot \hat{n}_w(j)}{\hat{n}_{ges}^2(j)} & \text{wenn } Rg_v \neq Rg_w, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8-12)$$

und

$$\hat{b}_v(j) = \frac{\sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \frac{\hat{p}_{v,vw}(j)}{\mu_v}}{1 - \hat{p}_g(j)}. \quad (8-13)$$

Für jeden Modellzug liegen die Wahrscheinlichkeit einer Verspätung  $p_{VGFK,i}$  und die mittlere Verspätung der verspäteten Züge  $\bar{t}_{VGFK,i}$  am Gesamtfahrstraßenknoten vor. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Verspätung  $p_{VGFK,ges}$  und für das Auftreten der mittleren Verspätung  $\bar{t}_{VGFK,ges}$  am Gesamtfahrstraßenknoten über alle Züge bestimmt sich nach

$$p_{VGFK,ges}(j) = \frac{\sum_{i=1}^g p_{VGFK,i} \cdot \hat{n}_i(j)}{\hat{n}_{ges}(j)}, \quad (8-14)$$

$$\bar{t}_{VGFK,ges}(j) = \frac{\sum_{i=1}^g \rho_{VGFK,i} \cdot \hat{n}_i(j) \cdot \bar{t}_{VGFK,i}}{\sum_{i=1}^g \rho_{VGFK,i} \cdot \hat{n}_i(j)}. \quad (8-15)$$

Werden nun in Gleichung (8-3) die Variablen durch die in diesem Kapitel hergeleiteten Variablen, die sich auf einen Gesamtfahrstraßenknoten beziehen, ersetzt, so ergibt sich für die außerplanmäßigen Wartezeiten ersten Grades eines Gesamtfahrstraßenknotens für einen Kunden  $j$ :

$$ET_{WB1}(j) = \left( \rho_{VGFK,ges}(j) - \frac{\rho_{VGFK,ges}^2(j)}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VGFK,ges}^2(j)}{\bar{t}_{p,ges}(j) + \bar{t}_{VGFK,ges}(j) \cdot \left(1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)}\right)} \cdot \left[ \hat{\rho}_g(j) \cdot \left(1 - e^{-\hat{b}_g(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)}\right)^2 + \left(1 - \hat{\rho}_g(j)\right) \cdot \frac{\hat{b}_v(j)}{\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \hat{b}_v(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)}\right) \right]. \quad (8-16)$$

## 8.2 Wartezeiten höheren Grades

Die außerplanmäßigen Wartezeiten setzen sich aus den Wartezeiten ersten Grades  $ET_{WB1}$  (8-16) und den Wartezeiten höheren Grades  $ET_{WB,H}$  zusammen. Die Wartezeiten höheren Grades entstehen durch Folgeverspätungen in Warteschlangen.

$$ET_{WB} = ET_{WB1} + ET_{WB,H} \quad (8-17)$$

Während bei den Wartezeiten ersten Grades die Prioritäten der Züge berücksichtigt werden, werden bei den Wartezeiten höheren Grades Rangunterschiede nicht mehr betrachtet. SCHWANHÄÜBER begründet dies mit dem tatsächlichen Betriebsgeschehen, da in längeren Warteschlangen in der Regel kein Reihenfolgetausch der Züge mehr stattfindet. Daher wird für die Bestimmung der Wartezeiten höheren Grades von einer Gleichrangigkeit aller Züge ausgegangen.

Die Wartezeiten höheren Grades werden nun mit den Wartezeiten ersten Grades über einen Hochrechnungsfaktor  $HRF$  geschätzt.

$$ET_{WB,H} = HRF \cdot ET_{WB1} \quad (8-18)$$

Durch Umformen ergibt sich die Formel zur Bestimmung des Hochrechnungsfaktors

$$HRF = \frac{ET_{WB,H}}{ET_{WB1}}. \quad (8-19)$$

Aus Gleichung (8-17) folgt

$$ET_{WB,H} = ET_{WB} - ET_{WB1}. \quad (8-20)$$

Das Einsetzen von (8-20) in (8-19) liefert schließlich die Formel zur Ermittlung des Hochrechnungsfaktors

$$HRF = \frac{ET_{WB} - ET_{WB1}}{ET_{WB1}} = \frac{ET_{WB}}{ET_{WB1}} - 1. \quad (8-21)$$

Der Hochrechnungsfaktor kann für den Grenzfall des völlig gestörten Betriebs exakt ermittelt werden. Der Grenzfall des völlig gestörten Betriebs ist auf jeden Fall erreicht, wenn alle Züge eine hohe Verspätung aufweisen. Dies ist der Fall bei  $p_{VGFK} \rightarrow 1$  und  $\bar{t}_{VGFK} \rightarrow \infty$ . Bei diesem Betriebszustand entsprechen die außerplanmäßigen Wartezeiten  $ET_{WB}$  den planmäßigen Wartezeiten  $ET_{WF}$  bei einem MARKOVschen Ankunftsstrom ( $VA = 1,0$ ), da die Züge in beiden Fällen zufällig am Gesamtfahrstraßenknoten ankommen. Die Wartezeiten im Betrieb entsprechen dann den Wartezeiten bei der Fahrplan-konstruktion, da in beiden Fällen „zufällige“ Zeitlagen vorliegen. Es gilt daher

$$\lim_{\substack{p_{VGFK,ges} \rightarrow 1 \\ \bar{t}_{VGFK,ges} \rightarrow \infty}} ET_{WB} = ET_{WF}. \quad (8-22)$$

Die planmäßigen Wartezeiten für einen Kunden  $ET_{WF}(j)$  wurden bereits in (7-68) ermittelt und sind gegeben durch

$$ET_{WF}(j) = \frac{\hat{V}B^2(j) + 1}{2} \cdot \hat{b}(j) \cdot \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right). \quad (8-23)$$

Da bei den Wartezeiten höheren Grades von Gleichrang ausgegangen wird und die Bedienzeiten eines Kunden konstant sind, ergibt sich für den Variationskoeffizienten der Bedienzeiten  $\hat{V}B = 0$ . Somit vereinfacht sich die Formel (8-23) und es ergibt sich eingesetzt in (8-22)

$$\lim_{\substack{p_{VGFK,ges} \rightarrow 1 \\ \bar{t}_{VGFK,ges} \rightarrow \infty}} ET_{WB}(j) = \frac{\hat{b}(j)}{2} \cdot \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right). \quad (8-24)$$

Die Wartezeiten ersten Grades  $ET_{WB1}$  können nach (8-16) bestimmt werden. Für den Betriebszustand des völlig gestörten Betriebs wird zur Bestimmung der Wartezeiten ersten Grades ebenfalls Gleichrang  $ET_{WB1,g}$  angenommen. Somit gilt

$$\hat{p}_g(j) = 1 \quad (8-25)$$

und

$$\hat{b}_g(j) = \hat{b}_v(j) = \hat{b}(j). \quad (8-26)$$

Formel (8-16) vereinfacht sich bei Gleichrang zu

$$ET_{WB1,g}(j) = \left( p_{VGFK,ges}(j) - \frac{p_{VGFK,ges}^2(j)}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VGFK,ges}^2(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)^2}{\bar{t}_{p,ges}(j) + \bar{t}_{VGFK,ges}(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)}. \quad (8-27)$$

Zusätzlich ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen  $p_{VGFK} \rightarrow 1$  und  $\bar{t}_{VGFK} \rightarrow \infty$  für die Wartezeiten ersten Grades  $ET_{WB1}$ .

$$ET_{WB1}(j) = \lim_{\substack{p_{VGFK,ges} \rightarrow 1 \\ \bar{t}_{VGFK,ges} \rightarrow \infty}} ET_{WB1,g}(j) = \frac{\hat{b}(j)^2}{2 \cdot \left( \bar{t}_{p,ges}(j) + \hat{b}(j) \right)} \quad (8-28)$$

Schließlich liefert das Einsetzen der Formeln (8-24) und (8-28) in (8-21) den gesuchten Hochrechnungsfaktor.

$$HRF = \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right) \cdot \left( \frac{\bar{t}_{p,ges}(j)}{\hat{b}(j)} + 1 \right) - 1 \quad (8-29)$$

Unter der Annahme, dass sich der Hochrechnungsfaktor auch bei anderen Betriebsgeschehen nicht wesentlich ändert, übernimmt SCHWANHÄUßER diesen Hochrechnungsfaktor für sämtliche Betriebszustände.

Da bei langen Warteschlangen Gleichrang angenommen wird, gilt für die Wartezeiten höherer Ordnung

$$ET_{WB,H} = HRF \cdot ET_{WB1,g}. \quad (8-30)$$

Das Einsetzen von (8-27) und (8-29) liefert die Formel zur Bestimmung der Wartezeiten höheren Grades für einen Kunden  $j$ .

$$E T_{WB,H}(j) = \left( \left[ \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right) \cdot \left( \frac{\bar{t}_{p,ges}(j)}{\hat{b}(j)} + 1 \right) - 1 \right] \cdot \left( \rho_{VGFK,ges}(j) - \frac{\rho_{VGFK,ges}^2(j)}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VGFK,ges}^2(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)^2}{\bar{t}_{p,ges}(j) + \bar{t}_{VGFK,ges}(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)} \right) \quad (8-31)$$

### 8.3 Erwartungswert der außerplanmäßigen Wartezeit

Nach Gleichung (8-17) gilt

$$E T_{WB}(j) = E T_{WB1}(j) + E T_{WB,H}(j). \quad (8-32)$$

Die außerplanmäßige Wartezeit eines Kunden  $j$  bestimmt sich durch Einsetzen der Formeln (8-16) und (8-31) zu

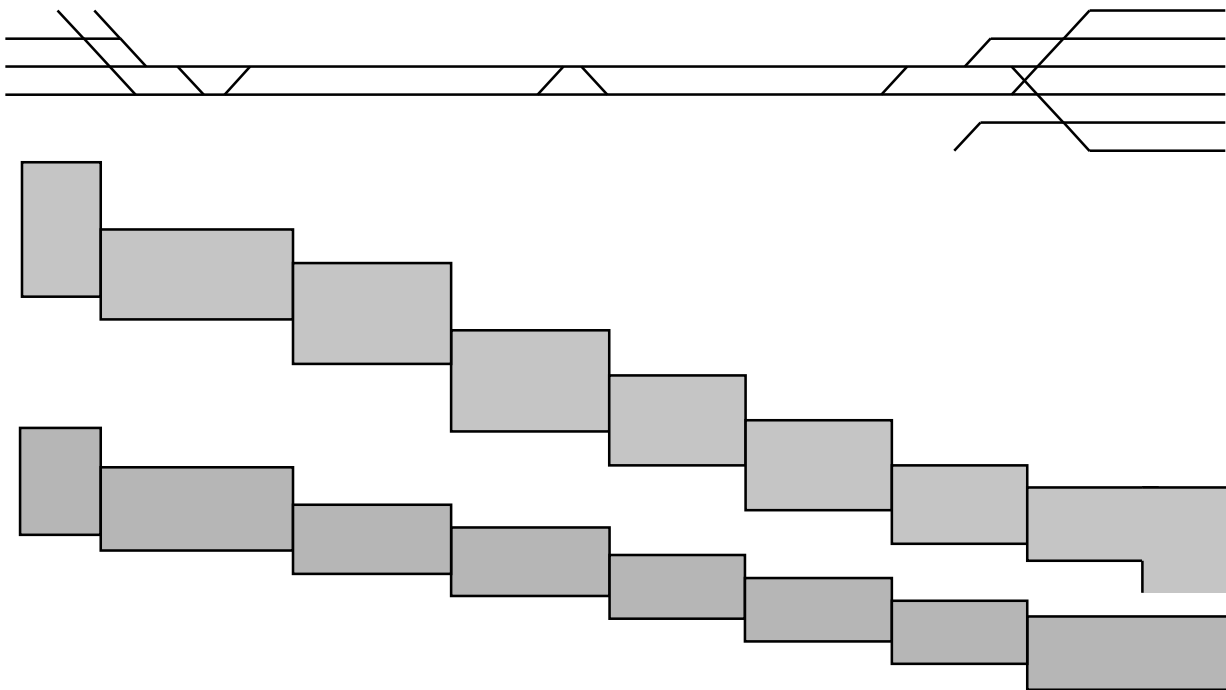
$$E T_{WB}(j) = \left( \rho_{VGFK,ges}(j) - \frac{\rho_{VGFK,ges}^2(j)}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_{VGFK,ges}^2(j)}{\bar{t}_{p,ges}(j) + \bar{t}_{VGFK,ges}(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)} \cdot \left[ \hat{\rho}_g(j) \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}_g(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)^2 + (1 - \hat{\rho}_g(j)) \cdot \frac{\hat{b}_v(j)}{\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \cdot \left( 1 - e^{-2 \cdot \hat{b}_v(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right) + \left[ \left[ \left( \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} - 1 \right) \cdot \left( \frac{\bar{t}_{p,ges}(j)}{\hat{b}(j)} + 1 \right) - 1 \right] \cdot \left( 1 - e^{-\hat{b}(j)/\bar{t}_{VGFK,ges}(j)} \right)^2 \right] \right] \quad (8-33)$$

Diese Endformel besitzt eine hohe Ähnlichkeit mit der STRELE-Formel (8-1). Der Hauptunterschied liegt im Hochrechnungsfaktor, der durch das Verhältnis des erhöhten Ankunftsstroms  $\lambda_j^*$  zum Ankunftsstrom  $\lambda_j$  die Effekte der Verkettung, die in einem Gesamtfahrstraßenknoten auftreten, berücksichtigt.

## 9 Wartezeiten je Netzelement und Rangstufe

### 9.1 Subtraktion der Streckenwartezeiten

In der Eisenbahnbetriebswissenschaft kann die Infrastruktur eines Eisenbahnnetzes mit Hilfe der Elemente Strecke, Gesamtfahrstraßenknoten und Gleisgruppe modelliert werden [57]. Ein Verfahren zur Ermittlung der planmäßigen Streckenwartezeiten ist die Methode nach WAKOB [52]. Zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten wird oftmals die so genannte STRELE-Formel nach SCHWANHÄUßER [44] angewandt. Zur Berechnung der Streckenwartezeiten werden die Zugfahrten von dem Startknoten bis zum Zielknoten der Strecke modelliert.



**Abb. 24: Modellierung von Zugfahrten zur Berechnung der Streckenwartezeiten**

Der „Bedienkanal“ zur Bestimmung der Mindestzugfolgezeiten setzt sich neben der Strecke noch aus den beiden Gesamtfahrstraßenknoten am Anfang und Ende des Abschnitts zusammen. Somit werden bei der Wartezeitenberechnung einer Strecke schon die Gesamtfahrstraßenknoten und die dort entstehenden Wartezeiten bei Zügen, die auf der gleichen Strecke fahren, mit berücksichtigt. Daher sind bei der Bestimmung der Wartezeiten, die an einem Gesamtfahrstraßenknoten entstehen, noch jene Zeitanteile herauszurechnen, die bereits in den Streckenwartezeiten enthalten sind. Dies betrifft all jene Zugfahrten, die bereits auf einer an den Gesamtfahrstraßenknoten angrenzenden

Strecke den identischen Bedienkanal belegen. Bei eingleisigen Strecken sind dies alle Zugfahrten, bei mehrgleisigen Strecken wird je Streckengleis unterschieden.

Insgesamt grenzen  $q$  Streckengleise (Bedienkanäle) an einen Gesamtfahrstraßenknoten. Berücksichtigt werden hier nur jene Streckengleise, die bei der Infrastrukturmodellierung einem Bedienkanal entsprechen. Die Streckengleise werden mit  $h = 1 \dots q$  bezeichnet. Für jedes Streckengleis  $h$  werden nun die doppelt angerechneten Wartezeiten im Gesamtfahrstraßenknoten bestimmt. Für die Zuganzahl eines Streckengleises gilt

$$\tilde{n}_i(h) = \begin{cases} n_i & \text{wenn Kunde } i \text{ das Streckengleis } h \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9-1)$$

$$\tilde{n}_{ges}(h) = \sum_{i=1}^g \tilde{n}_i(h) \quad (9-2)$$

Für die Bestimmung der mittleren Bedienzeit  $\tilde{b}(h)$  werden alle relevanten Bedienzeiten betrachtet.

$$\tilde{b}(h) = \sum_{i=1}^g \frac{\tilde{n}_i(h)}{\tilde{n}_{ges}(h) \cdot \mu_i} \quad (9-3)$$

### 9.1.1 Subtraktion der planmäßigen Streckenwartezeiten

Zur Subtraktion der planmäßigen Wartezeiten wird die POLLACZEK-KHINTCHIN Formel für einkanalige Bediensysteme angewendet.

Bei der Berechnung des Belegungsgrads  $\tilde{\rho}_{ges}(h)$  müssen die Bedienzeiten im Gesamtfahrstraßenknoten betrachtet werden.

$$\tilde{\rho}_i(h) = \frac{\tilde{n}_i(h)}{\mu_i \cdot t_u} \quad (9-4)$$

$$\tilde{\rho}_{ges}(h) = \sum_{i=1}^g \tilde{\rho}_i(h) \quad (9-5)$$

Als weitere Kenngrößen zur Ermittlung der planmäßigen Wartezeiten muss noch der Variationskoeffizient der Bedienzeiten  $\tilde{V}B(h)$  berechnet werden. Dazu wird zunächst die Varianz bestimmt.



$$\tilde{Var}(h) = \sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \frac{\tilde{n}_v(h) \cdot \tilde{n}_w(h)}{\tilde{n}_{ges}^2(h)} \cdot \left( \frac{1}{\mu_v} + t_{d,vw} - \tilde{b}(h) \right)^2 \quad (9-6)$$

mit den Dispositionszeiten  $t_d$

$$t_{d,vw} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_w} & \text{wenn } Rg_v < Rg_w \\ 0 & \text{wenn } Rg_v = Rg_w \\ -\frac{1}{\mu_v} & \text{wenn } Rg_v > Rg_w \end{cases} \quad (9-7)$$

Damit ergibt sich für den Variationskoeffizienten der Bedienzeiten  $\tilde{V}B(h)$

$$\tilde{V}B(h) = \frac{\sqrt{\tilde{Var}(h)}}{\tilde{b}(h)}. \quad (9-8)$$

Der Erwartungswert der planmäßigen Wartezeit  $ET_{h,WF}$  der Strecke  $h$ , der bei den Wartezeiten im Gesamtfahrstraßenknoten bereits enthalten ist, berechnet sich anhand der POLLACZEK-KHINTCHIN-Formel für M/GI/1/∞ Bediensysteme.

$$ET_{h,WF} = \frac{\tilde{\rho}_{ges}(h) \cdot \tilde{b}(h)}{1 - \tilde{\rho}_{ges}(h)} \cdot \left( \frac{1 + \tilde{V}B(h)}{2} \right). \quad (9-9)$$

Um den Erwartungswert der reduzierten planmäßigen Wartezeit für den Gesamtfahrstraßenknoten  $ET_{WF,red}$  zu erhalten, werden von dem zuvor bestimmten Wert (Formel (7-68)) die Streckenanteile subtrahiert.

$$ET_{WF,red} = \frac{\sum_{j=1}^g (n_j \cdot ET_{WF}(j)) - \sum_{h=1}^g (\tilde{n}_{ges}(h) \cdot ET_{h,WF})}{n_{ges}} \quad (9-10)$$

### 9.1.2 Subtraktion der außerplanmäßigen Streckenwartezeiten

Zur Subtraktion der außerplanmäßigen Wartezeiten wird die STRELE-Formel für einkanalige Bediensysteme angewendet. Die benötigten Eingangsgrößen werden im Folgenden ermittelt.

Zur Bestimmung der mittleren Bedienzeit der gleichrangigen Zugfolgefälle  $\tilde{b}_g(h)$  werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten für einen gleichrangigen Zugfolgefall  $v$ - $w$  auf der Strecke  $h$   $\tilde{p}_{g,vw}(h)$  ermittelt.

$$\tilde{p}_{g,vw}(h) = \begin{cases} \frac{\tilde{n}_v(h) \cdot \tilde{n}_w(h)}{\tilde{n}_{ges}^2(h)} & \text{wenn } Rg_v = Rg_w \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9-11)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines gleichrangigen Zugfolgefalls über alle Züge  $\tilde{p}_g(h)$  ist die Summe der zuvor in (9-11) bestimmten Wahrscheinlichkeiten.

$$\tilde{p}_g(h) = \sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \tilde{p}_{g,vw}(h). \quad (9-12)$$

Somit lässt sich die mittlere Belegungszeit auf der Strecke  $h$  bei Gleichrang nach

$$\tilde{b}_g(h) = \frac{\sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \tilde{p}_{g,vw}(h) \mu_v}{\tilde{p}_g(h)} \quad (9-13)$$

berechnen. Ebenso werden die Wahrscheinlichkeiten für einen verschiedenrangigen Zugfolgefall  $\tilde{p}_{v,vw}(h)$  und die mittlerer Belegungszeit bei verschiedenen Rangziffern  $\tilde{b}_v(h)$  bestimmt.

$$\tilde{p}_{v,vw}(h) = \begin{cases} \frac{\tilde{n}_v(h) \cdot \tilde{n}_w(h)}{\tilde{n}_{ges}^2(h)} & \text{wenn } Rg_v \neq Rg_w \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9-14)$$

$$\tilde{b}_v(h) = \frac{\sum_{v=1}^g \sum_{w=1}^g \tilde{p}_{v,vw}(h) \mu_v}{1 - \tilde{p}_g(j)} \quad (9-15)$$

Die mittlere Pufferzeit auf der Strecke  $h$  sei  $\tilde{t}_{p,ges}(h)$ . Diese berechnet sich nach

$$\tilde{t}_{p,ges}(h) = \frac{\tilde{n}_{ges}(h) \cdot \tilde{b}(h)}{t_u}. \quad (9-16)$$

Für jeden Kundentyp liegt die Wahrscheinlichkeit einer Verspätung  $p_{VGFK,i}$  und die mittlere Verspätung der verspäteten Züge  $\bar{t}_{VGFK,i}$  am Gesamtfahrstraßenknoten vor. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Verspätung  $p_V(h)$  und der mittleren Verspätung  $\bar{t}_V(h)$  für alle Züge der Strecke  $h$  bestimmt sich nach

$$p_V(h) = \frac{\sum_{i=1}^g p_{VGFK,i} \cdot \tilde{n}_i(h)}{\tilde{n}_{ges}(h)} \quad (9-17)$$

$$\bar{t}_V(h) = \frac{\sum_{i=1}^g p_{VGFK,i} \cdot \tilde{n}_i(h) \cdot \bar{t}_{VGFK,i}}{\sum_{i=1}^g p_{VGFK,i} \cdot \tilde{n}_i(h)}. \quad (9-18)$$

Der Erwartungswert der außerplanmäßigen Wartezeit  $ET_{h,WB}$  der Strecke  $h$ , der bei den Wartezeiten im Gesamtfahrstraßenknoten bereits enthalten ist, berechnet sich anhand der STRELE-Formel.

$$ET_{h,WB} = \left( p_V(h) - \frac{p_V^2(h)}{2} \right) \cdot \frac{\bar{t}_V^2(h)}{\tilde{t}_{p,ges}(h) + \bar{t}_V(h) \cdot (1 - e^{-\tilde{b}(h)/\bar{t}_V(h)})} \cdot \left[ \tilde{p}_g(h) \cdot (1 - e^{-\tilde{b}_g(h)/\bar{t}_V(h)})^2 + (1 - \tilde{p}_g(h)) \cdot \frac{\tilde{b}_V(h)}{\bar{t}_V(h)} \cdot (1 - e^{-2\tilde{b}_V(h)/\bar{t}_V(h)}) + \frac{\tilde{b}(h)}{\tilde{t}_{p,ges}(h)} \cdot (1 - e^{-\tilde{b}(h)/\bar{t}_V(h)})^2 \right] \quad (9-19)$$

Um den Erwartungswert der reduzierten außerplanmäßigen Wartezeit für den Gesamtfahrstraßenknoten  $ET_{WB,red}$  zu erhalten, werden von dem zuvor bestimmten Wert (Formel (9-19)) die Streckenanteile subtrahiert.

$$ET_{WB,red} = \frac{\sum_{j=1}^g (n_j \cdot ET_{WB}(j)) - \sum_{h=1}^g (\tilde{n}_{ges}(h) \cdot ET_{h,WB})}{n_{ges}} \quad (9-20)$$

## 9.2 Ermittlung der Wartezeiten für jede Rangstufe

Mit den beschriebenen Formeln kann die mittlere Wartezeit über alle Züge im Fahrplan und im Betrieb bestimmt werden. Aufgrund der verschiedenen Rangstufen erhalten jedoch hochrangige Züge weniger Wartezeiten als niederrangige Züge. WENDLER [59] schlägt daher vor, die Wartezeiten anhand einer Kaskade zu berechnen. Dabei werden zunächst die Wartezeiten der hochrangigen Züge bestimmt. Für die folgende Rangstufe werden dann alle Zugfahrten bis einschließlich der aktuellen berücksichtigt. Mit dieser Zuganzahl wird die Wartezeit berechnet. Die Differenz zwischen diesem Ergebnis und der Wartezeit der vorherigen Rangstufe entspricht der Wartezeit der aktuellen Rangstufe. Dieses Verfahren kann sowohl für die planmäßigen als auch für die außerplanmäßigen Wartezeiten angewendet werden.

Die Anzahl der Rangstufen sei  $n_{Rg}$ . Die Rangstufen werden nach fallender Priorität sortiert und mit  $k_{Rg} = 1 \dots n_{Rg}$  durchnummeriert. Die Rangziffer einer Rangstufe sei  $Rg(k_{Rg})$ . Für jede Rangstufe werden nun nur jene Zugfahrten  $j$  berücksichtigt, deren Rangziffer  $Rg_j$  kleiner oder gleich der Rangziffer der aktuellen Rangstufe  $Rg(k_{Rg})$  ist.

$$n_j(k_{Rg}) = \begin{cases} n_j & \text{wenn } Rg_j \leq Rg(k_{Rg}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9-21)$$

Anhand der in den Kapiteln 7 bis 9 beschriebenen Formeln erfolgt eine Berechnung der Wartezeiten mit den jeweils reduzierten Zugzahlen  $n_j(k_{Rg})$ . Dadurch ergibt sich der Erwartungswert der Wartezeit für alle Züge bis einschließlich der betrachteten Rangstufe  $ET_W(k_{Rg})$ . Zur Ermittlung des Erwartungswerts der Wartezeiten einer Rangstufe  $ET_{W\_k_{Rg}}$  werden die Wartezeiten der vorherigen Rangstufen von der aktuellen Rangstufe subtrahiert. Für  $k_{Rg} = 2 \dots n_{Rg}$  gilt

$$ET_{W\_k_{Rg}} = \frac{n_j(k_{Rg}) \cdot ET_W(k_{Rg}) - n_j(k_{Rg} - 1) \cdot ET_W(k_{Rg} - 1)}{n_j - k_{Rg}}. \quad (9-22)$$

Wobei  $n_{j\_k_{Rg}}$  die Zuganzahl der aktuellen Rangstufe darstellt.

$$n_{j\_k_{Rg}} = \begin{cases} n_j & \text{wenn } Rg_j = Rg(k_{Rg}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9-23)$$

Für die erste Rangstufe gilt außerdem

$$ET_{W\_1} = ET_W(1). \quad (9-24)$$

## 10 Rechenbeispiele

Dieses Kapitel enthält einige Berechnungsbeispiele, wobei die Formeln aus den Kapiteln 6 und 7 angewendet werden. Die Ergebnisse der planmäßigen Wartezeiten, der Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten werden mit den Resultaten von Monte-Carlo Simulationen verglichen. Zu diesem Zweck wurde ein Simulationsprogramm erstellt, dessen Grundzüge im folgenden Kapitel vorgestellt werden.

Danach wird beispielhaft die theoretische Leistungsfähigkeit eines Bediensystems ermittelt. Anschließend werden für dieses System die Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten bestimmt. Exemplarisch wird die Zerlegung des Systems in drei Teilsysteme erläutert.

Die Bestimmung der planmäßigen Wartezeiten wird an zwei Beispielen durchgeführt. Zum einen erfolgt die Berechnung für eine Abzweigstelle mit zwei Bedienkanälen und drei Kunden, zum anderen wird ein komplexes System mit sieben Bedienkanälen und acht Kunden untersucht. Die Ergebnisse werden mit dem Verfahren der Verkettungszahl, dem Referenzstromansatz und den durch die Simulation erzielten Werten verglichen.

### 10.1 Simulationsprogramm

Zur Überprüfung der Rechenbeispiele wurde ein Simulationstool programmiert. Dieses Programm erzeugt mehrere Monte-Carlo-Simulationen für ein zuvor definiertes Bediensystem. Die Ergebnisauswertung liefert Aussagen über die Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten sowie über die planmäßigen Wartezeiten der Kunden.

Als Eingangsdaten gibt der Benutzer die Anzahl der vorhandenen Bedienkanäle, die verschiedenen Kundentypen und die Kundenanzahl eines jeden Kundentypen vor. Die Ankunftsrate eines Kundentyps berechnet sich anhand des Quotienten aus Kundenanzahl und dem gewählten Untersuchungszeitraum. Außerdem sind für jeden Kundentyp die Bedienraten (Kehrwerte der mittleren Bedienzeiten) vorzuhalten und die benötigten Kanäle in einer Belegungsmatrix einzutragen. Abb. 25 zeigt die Benutzeroberfläche des Simulationsprogramms.

Szenario | Simulation | theoretische Leistungsfähigkeit | Wartezeiten

Anzahl der Bedienkanäle :

Anzahl unterschiedlicher Kunden:

Untersuchungszeitraum :

Anzahl der Kunden :

Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
125	55	110	35

Bedienrate :

Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
1	0,5	2	1,5

Belegungsmatrix :

Kunde/Kanal	Kanal 1	Kanal 2	Kanal 3
Kunde 1	0	1	1
Kunde 2	1	0	0
Kunde 3	1	1	1
Kunde 4	0	0	1

**Abb. 25: Benutzeroberfläche Simulationsprogramm**

Für jeden Simulationslauf werden zunächst die einzelnen Ankunftsabstände eines Kundentypen ermittelt. Da ein MARKOVscher Ankunftsstrom unterstellt wird, gilt für die Zwischenankunftszeiten  $t_{a,i}$ :

$$t_{a,i} = \frac{-\ln(zz)}{\lambda_j} \quad (10-1)$$

mit:

zz: gleichverteilte Zufallszahl im Intervall (0;1]

Für jeden Kundentypen werden nun die „zufälligen“ Zwischenankunftszeiten addiert und die so erhaltenen Ankunftszeiten so lange in eine Liste geschrieben, bis die Grenze des Untersuchungszeitraums überschritten ist. Durch dieses Vorgehen ergibt sich die Kun-

denanzahl eines Simulationslaufs. Die Kundenanzahl variiert von Lauf zu Lauf, im Mittel stellt sich jedoch der vom Benutzer vorgegebene Wert ein.

Da das System in einem eingeschwungenen Zustand betrachtet werden soll, ist das Einschwingverhalten beim Start einer Simulation zu berücksichtigen. Es besteht die Möglichkeit, erst nach einem bestimmten zeitlichen Vorlauf das Geschehen zu analysieren. Hier wurde jedoch ein anderes Vorgehen gewählt. Durch eine fiktive Startbelegung der einzelnen Kanäle wird der eingeschwungene Zustand modelliert. Als Startbelegung wird der Erwartungswert der Wartezeit, der sich anhand des Verkettungsmodells nach SCHWANHÄUßER ergibt, gewählt.

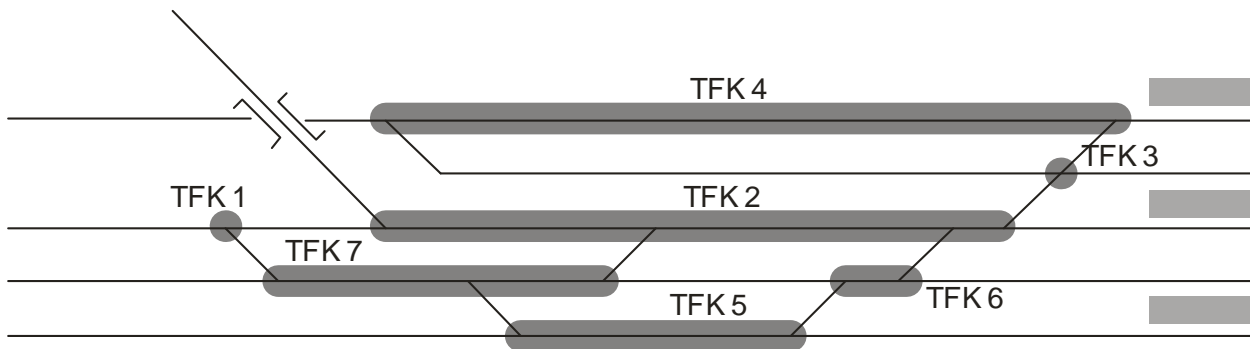
In dem Simulationstool wird für einen Kundentyp eine konstante Bedienzeit angenommen. Die Kunden werden prinzipiell nach dem Prinzip first come – first served bedient. In dem Belegungsalgorithmus wird für einen Kunden der früheste mögliche Zeitpunkt für seine Bedienung gesucht. Ist mindestens ein benötigter Kanal besetzt, so muss der Kunde warten. Da die Kunden unterschiedliche Kanäle anfordern, kann es vorkommen, dass später ankommende Kunden trotzdem vor früher eingetroffenen Kunden bedient werden. Dies ist dann der Fall, wenn der erste Kunde warten muss, der zweite Kunde jedoch direkt bedient werden kann, da seine benötigten Kanäle momentan frei sind und diese Kanäle für die gesamte Bediendauer noch nicht durch bereits wartende Kunden vorgemerkt sind. Dieser gewählte Modellierungsansatz wird nicht nur in dem Simulationstool, sondern auch bei der analytischen Berechnung der Wartezeiten (Kapitel 7.3) berücksichtigt.

Die Simulation kann in zwei Modi ausgeführt werden. Bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten werden Kunden, die nicht sofort bedient werden können, abgewiesen. Als Ergebnis werden die Verlustwahrscheinlichkeiten ermittelt. Außerdem kann das Modell als Wartesystem analysiert werden. Hier müssen die Kunden für den Fall, dass ein benötigter Kanal bei ihrer Ankunft belegt ist, auf die Bedienung warten. Als Resultat werden die Wartewahrscheinlichkeiten und die mittleren Wartezeiten eines Kundentypen bestimmt.

Für die Auswertung der Ergebnisse werden mehrer Simulationsläufe analysiert. Da die Resultate von Lauf zu Lauf stark schwanken können, werden mindestens 10.000 Simulationsläufe als Datengrundlage für die Auswertung herangezogen.

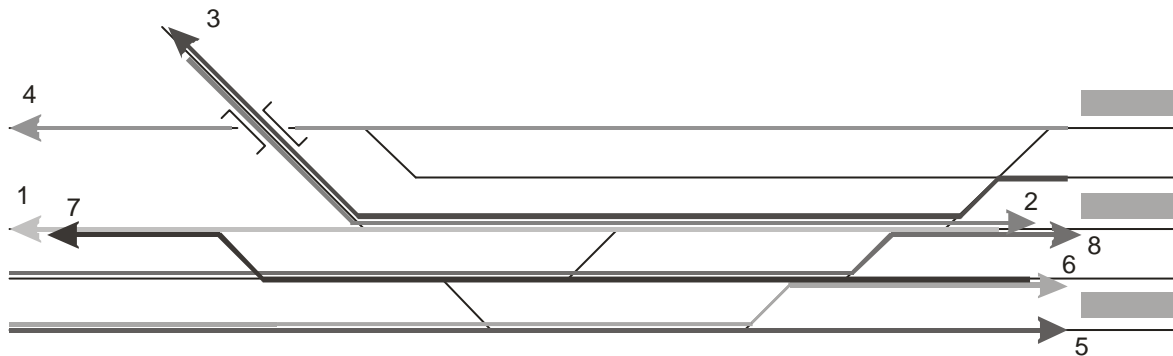
## 10.2 Berechnung der theoretischen Leistungsfähigkeit

In diesem Abschnitt wird eine Beispielrechnung für die Ermittlung der theoretischen Leistungsfähigkeit nach den Formeln aus Kap. 6 vorgestellt. Gegeben ist ein Gesamtfahrstraßenknoten eines Bahnhofskopfes mit der in Abb. 26 dargestellten Infrastruktur. Durch die Teilfahrstraßenknotenabgrenzung ergeben sich für dieses Beispiel sieben Bedienkanäle (TFKs).



**Abb. 26: Gesamtfahrstraßenknoten mit sieben Bedienkanälen**

Auf der betrachteten Infrastruktur soll nun das in Abb. 27 beschriebene Betriebsprogramm abgewickelt werden.



**Abb. 27: Fahrten des Gesamtfahrstraßenknotens**

Die Kanäle werden mit  $r = 1 \dots 7$  und die Kundentypen mit  $j = 1 \dots 8$  durchnummeriert. Die Ankunfts- und Bedienraten  $\lambda_j$  und  $\mu_j$  der Kundentypen sind in der folgenden Tab. 4 aufgelistet.



Kumentyp	Ankunftsrate $\lambda$	Bedienrate $\mu$
1	0,05	1
2	0,02	0,5
3	0,10	2
4	0,01	1
5	0,15	4
6	0,03	0,25
7	0,05	1
8	0,02	1,5

**Tab. 4: Ankunftsrate und Bedienrate**

Die Gesamtankunftsrate  $\lambda$  dieses Beispiels ist

$$\lambda = \sum_{j=1}^g \lambda_j = 0,43.$$

Die Belegungsmatrix  $\Delta$  dieses Bedienungssystems gestaltet sich wie folgt:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Belegungsmatrix lassen sich für dieses Beispiel insgesamt 40 mögliche Kombinationen  $\mathbf{k}_i$  aufstellen, die in Tab. 5 aufgeführt sind.

Die maximale Ankunftsrate  $\lambda_{\max}$  lässt sich durch die lineare Optimierung nach (6-9) bestimmen. Zur Lösung dieses Problems wird ein lineares Programmierungsverfahren angewendet, das nach der Simplex-Methode arbeitet.

Für dieses Beispiel ergibt sich

$$\lambda_{\max} = 2,345.$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten in denen sich das System befinden muss, damit der maximale Durchsatz erreicht wird, sind ebenfalls in Tab. 5 aufgelistet. Für die Leistungsfähigkeit besonders vorteilhaft sind bei diesem Beispiel die Kombinationen Nummer 12 und Nummer 19. Die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten muss wiederum 1,0 ergeben.

Komb. Nr.:	Kundentyp- kombination:	Zustands- wahrscheinlichkeit:
1		0
2	1	0
3	2	0
4	3	0
5	4	0
6	5	0
7	6	0,095
8	7	0,068
9	8	0,073
10	1 4	0
11	1 5	0
12	1 6	0,273
13	2 4	0
14	2 5	0
15	2 6	0,014
16	2 7	0
17	3 4	0
18	3 5	0
19	3 6	0,273
20	3 7	0
21	4 5	0
22	4 6	0
23	4 7	0
24	4 8	0
25	5 7	0
26	5 8	0
27	1 4 5	0
28	1 4 6	0
29	2 4 5	0
30	2 4 6	0
31	2 4 7	0
32	2 5 7	0,150
33	3 4 5	0
34	3 4 6	0
35	3 4 7	0
36	3 5 7	0
37	4 5 7	0
38	4 5 8	0
39	2 4 5 7	0,054
40	3 4 5 7	0

**Tab. 5: Kombinationen und Zustandswahrscheinlichkeiten bei Grenzleistung**

### 10.3 Berechnung der Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten

Für das im vorherigen Kapitel beschriebene Beispiel werden die Verlustwahrscheinlichkeiten analytisch mit Hilfe des Verfahrens von DZIONG und ROBERTS (Kap. 7.1.1) berechnet und mit Werten, die mit Hilfe von 10.000 Monte-Carlo Simulationsläufen bestimmt wurden, verglichen.

Kundentyp	Verlustwahrscheinlichkeit $p_v$		
	analytisch	simuliert	Abweichung
1	0,1672	0,1675	$\pm 0,0003$
2	0,1299	0,1304	$\pm 0,0005$
3	0,1299	0,1297	$\pm 0,0002$
4	0,0099	0,0102	$\pm 0,0003$
5	0,1310	0,1305	$\pm 0,0005$
6	0,1798	0,1796	$\pm 0,0002$
7	0,1864	0,1864	$\pm 0,0000$
8	0,2536	0,2534	$\pm 0,0002$

**Tab. 6: Vergleich von berechneten und simulierten Verlustwahrscheinlichkeiten**

Bei einem Vergleich der berechneten und simulierten Ergebnisse (Tab. 6) lässt sich erst bei der vierten Nachkommastelle eine Abweichung feststellen. Da bei der analytischen Berechnung die exakten Werte bestimmt werden, kann bei der Simulation von einer hohen Genauigkeit ausgegangen werden.

Zur Bestimmung der Wartewahrscheinlichkeiten werden näherungsweise die Verlustwahrscheinlichkeiten verwendet (Kap. 7.2). Für kleine Auslastungsgrade ist dieses Vorgehen statthaft; je höher der Auslastungsgrad ist, desto schlechter ist jedoch die Approximation. Um dies zu verdeutlichen, werden für das aktuelle Beispiel mit den acht Kundentypen die mittleren Verlustwahrscheinlichkeiten den mittleren Wartewahrscheinlichkeiten für verschiedene Belegungsgrade gegenübergestellt. Hierzu werden die Ankunftsrate aller Kundentypen prozentual geändert, damit das Mischungsverhältnis der Kundentypen untereinander gleich bleibt.

Die Verlustwahrscheinlichkeiten werden analytisch bestimmt. Die Wartewahrscheinlichkeiten berechnen sich über Monte-Carlo Simulationen mit jeweils 10.000 Simulationsläufen. In Abb. 28 sind die Ergebnisse grafisch aufgetragen. Bis zu einer Gesamtankunftsrate von 0,430, was in diesem Beispiel einer Auslastung von etwa 20 Prozent entspricht, sind die Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten nahezu identisch. Mit steigender Ankunftsrate jedoch steigt die Abweichung zwischen den Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten und der Fehler nimmt zu. Dieser Effekt lässt sich dadurch erklären, dass bei einem Wartesystem ankommende Kunden auf bereits wartende Kunden treffen können und durch diese beeinflusst werden. Je höher der Auslastungsgrad ist,

umso größer ist diese Wahrscheinlichkeit. Im Gegensatz hierzu sind bei einem Verlustsystem keine wartenden Kunden vorhanden. Daher können bei diesem System im Vergleich zu einem Wartesystem neu eintreffende Kunden häufiger sofort bedient werden.

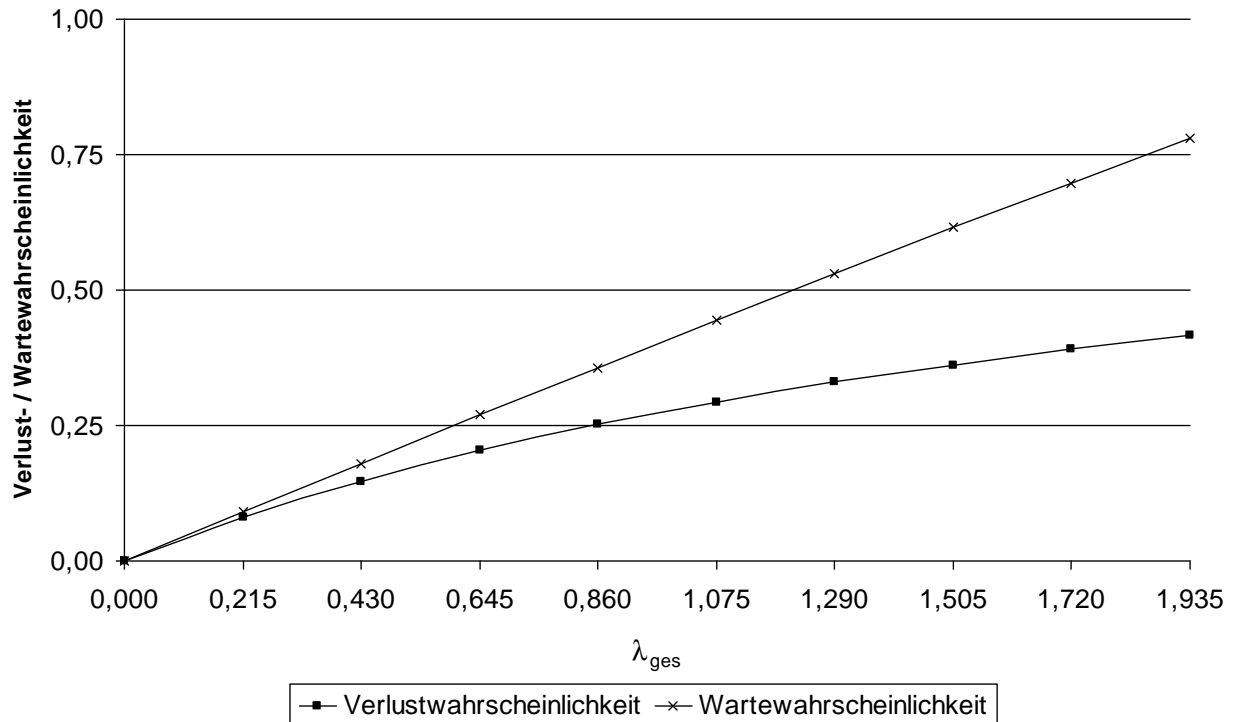


Abb. 28: Verlustwahrscheinlichkeiten und Wartewahrscheinlichkeiten

## 10.4 Zerlegung eines Systems in drei Teilsysteme

In diesem Abschnitt wird eine Beispielrechnung für die Zerlegung eines Systems in drei Teilsysteme nach den Formeln aus Kap. 7.1.3 vorgestellt. Gegeben ist das in Kapitel 10.2 definierte Bediensystem. Die Belegungsmatrix  $\Delta$  dieses Bedienungssystems ist auf Seite 89 beschrieben. Die Kanäle werden mit  $r = 1 \dots 7$  und die Kundentypen mit  $j = 1 \dots 8$  durchnummeriert. Die Ankunfts- und Bedienraten  $\lambda_j$  und  $\mu_j$  der Kundentypen sind bekannt; der Belegungsgrad  $\rho_j$  eines Kundentypen berechnet sich nach

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j}.$$

Zunächst werden die Kanäle in die Mengen  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  aufgeteilt. Bei Betrachtung der Belegungsmatrix können zwei Untermatrizen identifiziert werden, deren Felder nicht besetzt sind. Diese Untermatrizen können auch durch einen Zeilen- und Spaltentausch

erzeugt werden. Anhand der Untermatrizen lassen sich nun die Kundentypen feststellen, die unabhängig voneinander bedient werden können.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel sind dies die Kundentypen eins bis drei, die für ihre Bedienung die Kanäle eins bis drei benötigen, sowie die Kundentypen vier bis sechs, welche die Kanäle vier bis sechs beanspruchen. Somit ist es sinnvoll, die Kanäle eins bis drei der Menge  $R_1$  und die Kanäle vier bis sechs der Menge  $R_2$  zuzuordnen. Der Kanal sieben wird der Menge  $R_0$  zugewiesen und enthält Kunden, die in  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  Kanäle beanspruchen.

$$\begin{aligned} R_0 &= \{7\} \\ R_1 &= \{1,2,3\} \\ R_2 &= \{4,5,6\} \end{aligned}$$

Die Kapazitätsvektoren der drei Teilsysteme sind

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= (1) \\ \mathbf{c}_1 &= (1,1,1) . \\ \mathbf{c}_2 &= (1,1,1) \end{aligned}$$

Die Zuteilung der Kunden zu den Mengen  $T_0$ ,  $T_1$  und  $T_2$  ergibt

$$\begin{aligned} T_0 &= \{7,8\} \\ T_1 &= \{1,2,3,7,8\} . \\ T_2 &= \{4,5,6,7,8\} \end{aligned}$$

Die Mengen  $T_1$  und  $T_2$  werden nun noch um die Kunden bereinigt, die auch in der Menge  $T_0$  enthalten sind. Es folgt

$$T_1^* = \{1,2,3\}$$

$$T_2^* = \{4,5,6\}$$

Für das Teilsystem 1 ergibt sich die Belegungsmatrix  $\Delta_1$  zu

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und für das Teilsystem 2 die Belegungsmatrix  $\Delta_2$  zu

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Hilfsvektor  $\mathbf{a}_0(r)$  ist für jeden Kanal aufzustellen.

$$\mathbf{a}_0(1) = (1, 0)$$

$$\mathbf{a}_0(2) = (0, 1)$$

$$\mathbf{a}_0(3) = (0, 0)$$

$$\mathbf{a}_0(4) = (0, 0)$$

$$\mathbf{a}_0(5) = (0, 0)$$

$$\mathbf{a}_0(6) = (1, 1)$$

$$\mathbf{a}_0(7) = (1, 1)$$

Mit den Kunden aus der Menge  $T_0$  lassen sich insgesamt die drei Teilkombinationen

$$tk_1 = (0, 0)$$

$$tk_2 = (1, 0)$$

$$tk_3 = (0, 1)$$

bilden. Für diese drei Teilkombinationen sind die Hilfsvektoren  $\mathbf{x}_1(tk)$  und  $\mathbf{x}_2(tk)$  aufzustellen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(\mathbf{tk}_1) &= (0, 0, 0) \\
 \mathbf{x}_1(\mathbf{tk}_2) &= (1, 0, 0) \\
 \mathbf{x}_1(\mathbf{tk}_3) &= (0, 1, 0) \\
 \mathbf{x}_2(\mathbf{tk}_1) &= (0, 0, 0) \\
 \mathbf{x}_2(\mathbf{tk}_2) &= (0, 0, 1) \\
 \mathbf{x}_2(\mathbf{tk}_3) &= (0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Nun können für die Teilsysteme die Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  berechnet werden. Ausführlich wird dieses Vorgehen an dem Beispiel zur Bestimmung von  $G_1(0,1,0)$  vorgeführt.

$$\begin{aligned}
 G_1(0, 1, 0) &= G_1((0, 0, 0) + (0, 1, 0)) = \\
 &G_1(0, 0, 0) + \rho_1 \cdot 1 \cdot [G_1((0, 0, 0) + (0, 1, 0) - (1, 1, 0)) - G_1((0, 0, 0) - (1, 1, 0))] \\
 &+ \rho_2 \cdot 1 \cdot [G_1((0, 0, 0) + (0, 1, 0) - (0, 1, 0)) - G_1((0, 0, 0) - (0, 1, 0))] \\
 &+ \rho_3 \cdot 1 \cdot [G_1((0, 0, 0) + (0, 1, 0) - (0, 1, 1)) - G_1((0, 0, 0) - (0, 1, 1))] = \\
 &G_1(0, 0, 0) + \rho_1 [G_1(-1, 0, 0) - G_1(-1, -1, 0)] \\
 &+ \rho_2 [G_1(0, 0, 0) - G_1(0, -1, 0)] + \rho_3 [G_1(0, 0, -1) - G_1(0, -1, -1)] = \\
 &1 + \rho_1 [0 - 0] + \rho_2 [1 - 0] + \rho_3 [0 - 0] = \\
 &1 + \rho_2
 \end{aligned}$$

Für das Teilsystem Eins ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 G_1(0, 0, 0) &= 1 \\
 G_1(1, 0, 0) &= 1 \\
 G_1(0, 1, 0) &= 1 + \rho_2 \\
 G_1(0, 0, 1) &= 1 \\
 G_1(1, 1, 0) &= 1 + \rho_1 + \rho_2 \\
 G_1(1, 0, 1) &= 1 \\
 G_1(0, 1, 1) &= 1 + \rho_2 + \rho_3 \\
 G_1(1, 1, 1) &= 1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3
 \end{aligned}$$

Für das Teilsystem Zwei lassen sich folgende Werte bestimmen:

$$\begin{aligned}
 G_2(0,0,0) &= 1 \\
 G_2(1,0,0) &= 1 + \rho_4 \\
 G_2(0,1,0) &= 1 + \rho_5 \\
 G_2(0,0,1) &= 1 \\
 G_2(1,1,0) &= 1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_5 \\
 G_2(1,0,1) &= 1 + \rho_4 \\
 G_2(0,1,1) &= 1 + \rho_5 + \rho_6 \\
 G_2(1,1,1) &= 1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_4 \cdot \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_6
 \end{aligned}$$

Nun kann die Normalisierungskonstante  $G(\mathbf{c})$  für das Gesamtsystem mit Hilfe der Normalisierungskonstanten  $G_1$  und  $G_2$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{c}) &= G_1((1,1,1) - \mathbf{x}_1(0,0)) \cdot G_2((1,1,1) - \mathbf{x}_2(0,0)) \cdot 1 \cdot 1 \\
 &+ G_1((1,1,1) - \mathbf{x}_1(1,0)) \cdot G_2((1,1,1) - \mathbf{x}_2(1,0)) \cdot \rho_7 \cdot 1 \\
 &+ G_1((1,1,1) - \mathbf{x}_1(0,1)) \cdot G_2((1,1,1) - \mathbf{x}_2(0,1)) \cdot 1 \cdot \rho_8 = \\
 &G_1((1,1,1) - (0,0,0)) \cdot G_2((1,1,1) - (0,0,0)) \\
 &+ G_1((1,1,1) - (1,0,0)) \cdot G_2((1,1,1) - (0,0,1)) \cdot \rho_7 \\
 &+ G_1((1,1,1) - (0,1,0)) \cdot G_2((1,1,1) - (0,0,1)) \cdot \rho_8 = \\
 &G_1(1,1,1) \cdot G_2(1,1,1) + G_1(0,1,1) \cdot G_2(1,1,0) \cdot \rho_7 + G_1(1,0,1) \cdot G_2(1,1,0) \cdot \rho_8
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte ergibt sich

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{c}) &= (1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_7 + (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_8 \\
 &+ (1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_4 \cdot \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_6)
 \end{aligned}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $\pi_0$  werden nun für jede Teilkombination berechnet.

$$\pi_0(\mathbf{tk}_1) = \frac{G_1((1,1,1) - \mathbf{x}_1(0,0)) \cdot G_2((1,1,1) - \mathbf{x}_2(0,0)) \cdot 1 \cdot 1}{G(\mathbf{c})}$$

Das Einsetzen und Auflösen liefert für die Zustandswahrscheinlichkeit der Teilkombination  $\mathbf{tk}_1$ :

$$\begin{aligned}
 \pi_0(0,0) &= (1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_4 \cdot \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_6) / ((1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_7 \\
 &+ (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_8 + (1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot (1 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_4 \cdot \rho_5 + \rho_4 \cdot \rho_6))
 \end{aligned}$$



Für die Teilkombinationen  $\mathbf{tk}_2$  und  $\mathbf{tk}_3$  lassen sich folgende Zustandswahrscheinlichkeiten bestimmen:

$$\pi_0(1,0) = (1+\rho_2+\rho_3) \cdot (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_7 / ((1+\rho_2+\rho_3) \cdot (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_7 + (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_8 + (1+\rho_1+\rho_2+\rho_3) \cdot (1+\rho_4+\rho_5+\rho_6+\rho_4 \cdot \rho_5+\rho_4 \cdot \rho_6))$$

$$\pi_0(0,1) = (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_8 / ((1+\rho_2+\rho_3) \cdot (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_7 + (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5) \cdot \rho_8 + (1+\rho_1+\rho_2+\rho_3) \cdot (1+\rho_4+\rho_5+\rho_6+\rho_4 \cdot \rho_5+\rho_4 \cdot \rho_6))$$

Exemplarisch werden nun für den Kundentyp vier aus dem Teilssystem zwei die weiteren Rechenschritte zur Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeit ausführlich dargestellt. Für diesen Kunden ist die Hilfsgröße  $B_2(4,((1,1,1)-\mathbf{x}_2(\mathbf{tk}))$  zu bilden. Für die Teilkombination  $\mathbf{tk}_1$  folgt:

$$B_2(4,(1,1,1)-(0,0,0)) = 1 - G_2((1,1,1)-(1,0,0)) / G_2(1,1,1) = 1 - G_2(0,1,1) / G_2(1,1,1) = 1 - (1+\rho_5+\rho_6) / (1+\rho_4+\rho_5+\rho_6+\rho_4 \cdot \rho_5+\rho_4 \cdot \rho_6).$$

Für die Teilkombination  $\mathbf{tk}_2$  und  $\mathbf{tk}_3$  ergibt sich der gleiche Wert

$$B_2(4,(1,1,0)) = 1 - (1+\rho_5) / (1+\rho_4+\rho_5+\rho_4 \cdot \rho_5),$$

da die Hilfsvektoren  $\mathbf{x}_2(\mathbf{tk}_2)$  und  $\mathbf{x}_2(\mathbf{tk}_3)$  identisch sind. Nun sind sämtliche Größen zur Ermittlung der Verlustwahrscheinlichkeit des Kunden vier bestimmt und es ergibt sich

$$\rho_{v,4} = \pi_0(0,0) \cdot B_2(4,(1,1,1)) + \pi_0(1,0) \cdot B_2(4,(1,1,0)) + \pi_0(0,1) \cdot B_2(4,(1,1,0)) = \rho_4 / (1+\rho_4).$$

Für Kunden aus der Menge  $T_0$  sind für jede Teilkombinationen die Werte  $\alpha_j(\mathbf{tk})$  zu bestimmen. Beispielhaft werden hier die entsprechenden Werte für den Kundentyp sieben aufgeführt.

$$\alpha_7(\mathbf{tk}_1) = 1$$

$$\alpha_7(\mathbf{tk}_2) = 0$$

$$\alpha_7(\mathbf{tk}_3) = 0$$

Nachrichtlich werden für dieses Beispiel die Verlustwahrscheinlichkeiten aller Kunden im Anhang aufgelistet. Anhand der Ergebnisse fällt auf, dass sich der Kundentyp vier und die übrigen Kunden nicht gegenseitig beeinflussen. Da in dem gewählten Beispiel der Kundentyp vier ausschließlich den Kanal vier belegt und dieser Kanal auch von keinem anderen Kunden beansprucht wird, kann der Kanal vier isoliert betrachtet werden. Daher können hier die Formeln für ein einkanaliges Bediensystem verwendet werden.

Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit erfolgt nach der ERLANG-Formel

$$p_V = \frac{\frac{\rho^s}{s!}}{\sum_{r=0}^s \frac{\rho^r}{r!}} \quad (10-2)$$

mit  $s$  : Anzahl der parallelen Bedienkanäle. Da für ein einkanaliges System  $s = 1$  gilt, folgt:

$$p_V = \frac{\frac{\rho^1}{1!}}{\sum_{r=0}^1 \frac{\rho^r}{r!}} = \frac{\rho}{1 + \rho} \quad (10-3)$$

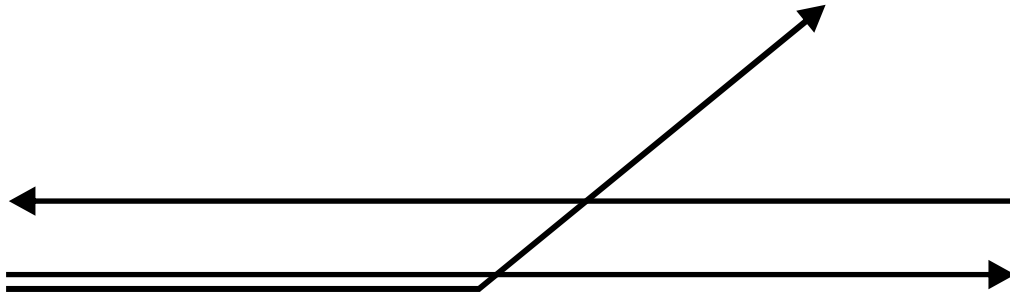
Damit wird das Ergebnis für den Kundentyp vier bestätigt. In Tab. 7 sind für dieses Beispiel die Verlustwahrscheinlichkeiten aufgeführt, die einmal nach dem Verfahren von DZIONG und ROBERTS und ein weiteres Mal mit Hilfe des Zerlegealgorithmus bestimmt wurden. Die Ergebnisse sind identisch.

Kundentyp	Ankunftsrate	Bedienrate	Belegungsgrad	Verlustwahrscheinlichkeit $p_V$	
	$\lambda$	$\mu$	$\rho$	DZIONG/ROBERTS	Zerlegung
1	0,05	1	0,05	0,1672	0,1672
2	0,02	0,5	0,04	0,1299	0,1299
3	0,10	2	0,05	0,1299	0,1299
4	0,01	1	0,01	0,0099	0,0099
5	0,15	4	0,0375	0,1310	0,1310
6	0,03	0,25	0,12	0,1798	0,1798
7	0,05	1	0,05	0,1864	0,1864
8	0,02	1,5	0,0133	0,2536	0,2536

**Tab. 7: Verlustwahrscheinlichkeiten nach DZIONG / ROBERTS und nach Zerlegung**

## 10.5 Berechnung der Wartezeiten

Zur Berechnung der planmäßigen Wartezeiten wird als erstes Rechenbeispiel eine Abzweigstelle gewählt. Abb. 29 zeigt für dieses Beispiel die Infrastruktur sowie die drei unterschiedlichen Fahrmöglichkeiten.



**Abb. 29: Abzweigstelle mit drei Kundentypen**

Dieses einfache Bediensystem besteht aus zwei Kanälen und drei Kundentypen. Die Belegungsmatrix  $\Delta$  dieses Bedienungssystems gestaltet sich wie folgt:

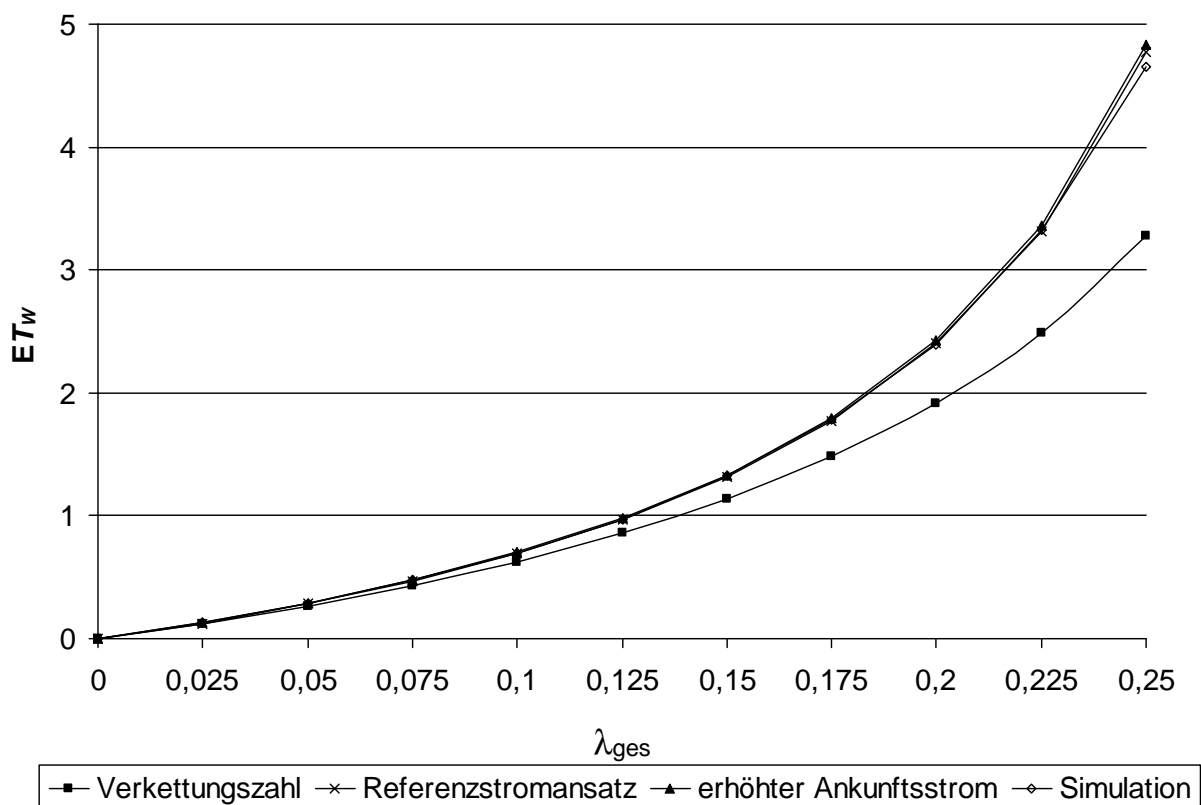
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die planmäßigen Wartezeiten werden für unterschiedliche Ankunftsrate mit Hilfe der Verkettungszahl nach POTTHOFF (Kap. 4.1.2), dem Referenzstromansatz (Kap. 4.1.4) und dem Vorgehen nach Kap. 7.3 (erhöhte Ankunftsstrom) berechnet und mit den Ergebnissen aus 10.000 Monte-Carlo Simulationläufen verglichen. Für die Bestimmung der Gesamtankunftsrate wird das Mischungsverhältnis der drei Kundentypen eingehalten. Die Bedienraten werden als unveränderlich angenommen. Die Ankunfts- und Bedienraten sind in Tab. 8 aufgeführt.

Kundentyp	Ankunftsrate $\lambda$	Bedienrate $\mu$
1	0...0,15	0,25
2	0...0,05	0,50
3	0...0,05	0,33

**Tab. 8: Ankunftsrate und Bedienrate / Abzweigstelle**

Die Berechnungsergebnisse sind in Abb. 30 dargestellt. Der Referenzstromansatz, das Vorgehen des erhöhten Ankunftsstroms und die Simulation liefern nahezu identische Werte. Die Berechnung der Wartezeiten anhand der Verkettungszahl ergibt zu geringe Wartezeiten. Bei hohen Belegungsgraden werden die Abweichungen deutlicher.



**Abb. 30: Erwartungswert der Wartezeiten am Beispiel einer Abzweigstelle**

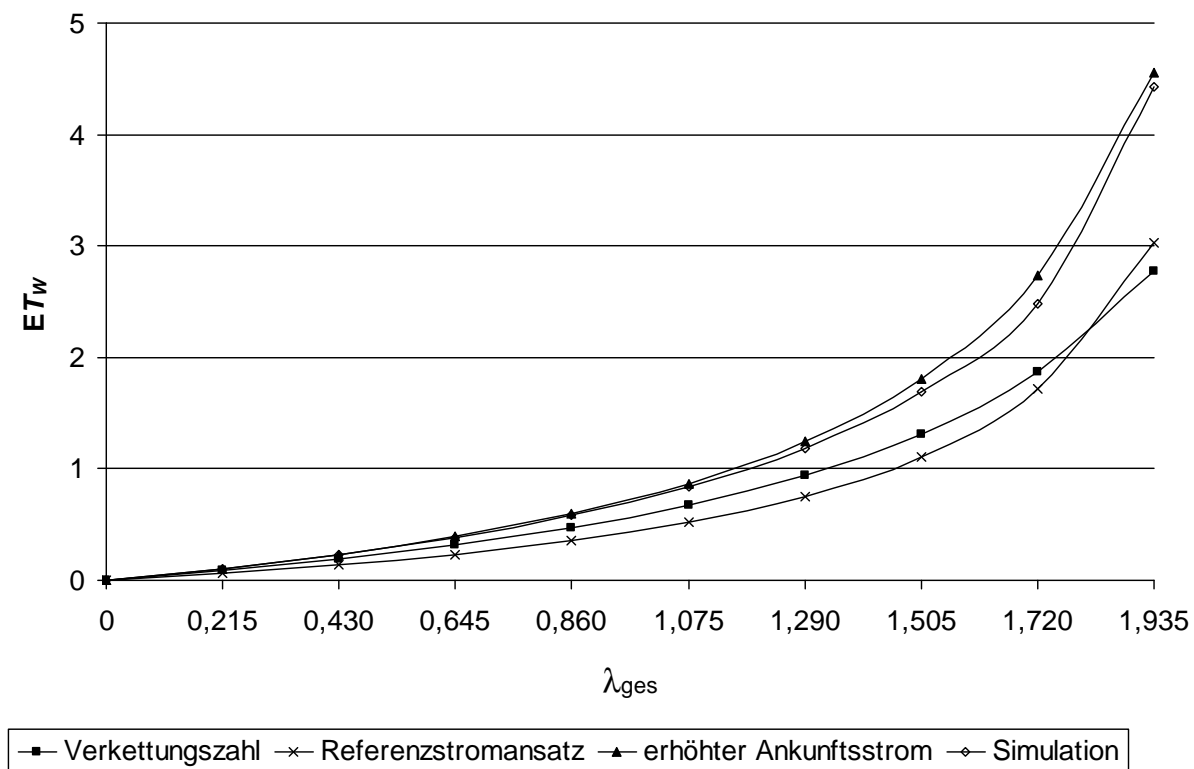
Als weiteres Beispiel wird das bereits in den Kapiteln 10.2 und 10.3 eingeführte Bediensystem mit den acht Kundentypen aufgegriffen. Der Erwartungswert der planmäßigen Wartezeit wird in Abhängigkeit von der Auslastung nach den verschiedenen Verfahren berechnet. In Abb. 31 sind die Ergebnisse grafisch dargestellt.

Der Ansatz mit der Verkettungszahl liefert auch in diesem Beispiel deutlich zu niedrige Resultate. Da bei diesem Vorgehen das komplexe System durch ein einkanaliges Ersatzmodell abgebildet wird, können nicht alle Einflüsse der Kundentypen berücksichtigt werden. So liefert z. B. die Mittelwertbildung der Bedienzeiten bei stark streuenden Bedienraten zu optimistische Ergebnisse. Außerdem werden nur jene Kunden betrachtet, die in der maßgebenden Kette liegen. Die Ergebnisse dieser Kunden werden dann auf alle anderen übertragen. Aus diesen Gründen kann dieses Verfahren nur für eine grobe Überschlagsrechnung verwendet werden, wobei jedoch der geringe Rechenaufwand als ein Vorteil anzusehen ist.

Der Referenzstromansatz nach OETTING produziert ebenfalls zu geringe Ergebnisse und kann daher nur als eine Approximation gebraucht werden. Dies ist damit zu begründen, dass bei der Wartezeitenberechnung für einen Kundentyp unterschiedliche einkanalige Teilsysteme berücksichtigt werden und die Wechselwirkung der Teilssys-

teme untereinander nicht ausreichend berücksichtigt werden können. Für jedes Teilsystem wird ein optimales Bedienverhalten angenommen; werden die Einzelergebnisse dann zusammengefügt, so ergeben sich für das Gesamtsystem gesehen zu optimistische Werte.

Das neu entwickelte Verfahren des erhöhten Ankunftsstroms erzielt im Vergleich zu den Simulationswerten die mit Abstand besten Resultate. Lediglich im Bereich hoher Auslastungsgrade werden in diesem Beispiel die Ergebnisse leicht überschätzt.



**Abb. 31: Erwartungswert der Wartezeiten am Beispiel mit acht Kundentypen**

## 11 Zusammenfassung und offene Fragen

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung von analytischen Verfahren zur Bestimmung der Leistungskenngrößen von Gesamtfahrstraßenknoten. Dabei konnten verschiedene Formeln hergeleitet werden, die für einige Kenngrößen exakte Ergebnisse liefern und für weitere eine geeignete Approximation darstellen.

So kann für das zeitweise mehrkanalige Bediensystem eines Gesamtfahrstraßenknotens erstmalig die Grenzleistung, die sogenannte theoretische Leistungsfähigkeit, bestimmt werden. Mit Hilfe der Grenzleistung kann nun der Auslastungsgrad eines Gesamtfahrstraßenknotens bestimmt werden. Bis jetzt war der genaue Auslastungsgrad nur für die Infrastrukturelemente Strecken, Gleisgruppen und Teilfahrstraßenknoten berechenbar.

Außerdem liegen nun Formeln vor, um für Gesamtfahrstraßenknoten die exakten Verlustwahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Wenngleich die Verlustwahrscheinlichkeiten in der Eisenbahnbetriebswissenschaft kaum von Bedeutung sind, können anhand dieser Werte die Wartewahrscheinlichkeiten und die planmäßigen Wartezeiten abgeschätzt werden. Beispielrechnungen zeigen, dass für kleine Auslastungsgrade die Wartewahrscheinlichkeiten gut mit Hilfe der Verlustwahrscheinlichkeiten abgebildet werden können. Bei großen Auslastungsgraden ist dieses Vorgehen jedoch nicht mehr geeignet.

Unter Berücksichtigung der Verlustwahrscheinlichkeiten ist es möglich die planmäßigen Wartezeiten mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens des erhöhten Ankunftsstroms näherungsweise zu bestimmen. Ein Vergleich dieses neuen Verfahrens mit Simulationsergebnissen sowie den bereits existierenden analytischen Verfahren der Verkettungszahl und des Referenzstromansatzes zeigt, dass der neue Ansatz bei der Berechnung der planmäßigen Wartezeiten sehr gute Resultate erzielt.

Des Weiteren können Teilergebnisse des Verfahrens des erhöhten Ankunftsstroms genutzt werden, um die außerplanmäßigen Wartezeiten eines Gesamtfahrstraßenknotens zu bestimmen. Zu diesem Zweck ist es möglich die sogenannte STRELE-Formel [44], die zur Bestimmung der außerplanmäßigen Wartezeiten für einkanalige Bediensysteme verwendet wird, an die Anforderungen eines Gesamtfahrstraßenknoten anzupassen.

Als nächster Schritt müssen für einen Gesamtfahrstraßenknoten nun Qualitätskenngrößen festgelegt werden, damit für die in dieser Arbeit beschriebenen Leistungskenngrößen auch eine Bewertung möglich ist. Bis auf Weiteres können für eine zulässige Auslastung die Werte nach UIC Leaflet 406 [50], für eine zulässige Wartewahrscheinlichkeit

die Richtwerte der Deutschen Bahn [11] und für eine zulässige Wartezeit die Werte nach SCHWANHÄUßER [47] verwendet werden.

Schließlich können die im Rahmen dieser Arbeit hergeleiteten Formeln in den eisenbahnbetriebswissenschaftlichen Verfahren zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit, wie z. B. ANKE [51] oder MOSES [8], implementiert werden, um dort Gesamtfahrstraßenknoten zu analysieren.

## 12 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

### Vektoren und Matrizen

<b>A</b>	Ausschlussmatrix
$a_{ij}$	Eintrag der Ausschlussmatrix
$\mathbf{a}_0(r)$	Hilfsvektor
<b>c</b>	Kapazitätsvektor
$c_r$	Eintrag des Kapazitätsvektors
$\mathbf{c}_0$	Kapazitätsvektor der Teilsystems $R_0$
$c_{0,r0}$	Eintrag des Kapazitätsvektors $\mathbf{c}_0$
$\mathbf{c}_1$	Kapazitätsvektor der Teilsystems $R_1$
$c_{1,r1}$	Eintrag des Kapazitätsvektors $\mathbf{c}_1$
$\mathbf{c}_2$	Belegungsvektor der Teilsystems $R_2$
$c_{2,r2}$	Eintrag des Belegungsvektor s $\mathbf{c}_2$
<b>e</b>	Einheitsvektor
<b>k</b>	Vektor einer möglichen Kundenkombination
$k_{jl}$	Eintrag der Kundenkombination
$\mathbf{o}_1(j)$	Hilfsvektor
$\mathbf{o}_2(j)$	Hilfsvektor
<b>tk</b>	Vektor einer möglichen Teilkombination
<b>u</b>	Belegungsvektor
$u_r$	Eintrag des Belegungsvektors
$\mathbf{u}_0$	Belegungsvektor der Teilsystems $R_0$
$u_{0,r0}$	Eintrag des Belegungsvektors $\mathbf{c}_0$
$\mathbf{u}_1$	Belegungsvektor der Teilsystems $R_1$
$u_{1,r1}$	Eintrag des Belegungsvektors $\mathbf{c}_1$
$\mathbf{u}_2$	Belegungsvektor der Teilsystems $R_2$
$u_{2,r2}$	Eintrag des Belegungsvektors $\mathbf{c}_2$
$\mathbf{x}_1(\mathbf{u}_0)$	Hilfsvektor
$\mathbf{x}_2(\mathbf{u}_0)$	Hilfsvektor
$\Delta$	Belegungsmatrix
$\delta_{jr}$	Eintrag der Belegungsmatrix
$\delta_j$	Anforderungsvektor des Kunden j
$\Gamma$	Kombinationsbelegungsmatrix
$\gamma_{lr}$	Eintrag der Kombinationsbelegungsmatrix



## Mengen und Nummerierungen

$h$	Nummerierung der angrenzenden Streckengleise
$j$	Nummerierung der Kundentypen
$j_0$	Nummerierung der Kundentypen aus der Menge $T_0$
$j_1$	Nummerierung der Kundentypen aus der Menge $T_1^*$
$j_2$	Nummerierung der Kundentypen aus der Menge $T_2^*$
$k_{RG}$	Nummerierung der Rangstufen
$l$	Nummerierung der möglichen Kundenkombinationen
$l_0$	Nummerierung der möglichen Teilkombinationen
$r$	Nummerierung der Bedienkanäle
$r_1$	Nummerierung der Bedienkanäle der Menge $R_1$
$r_2$	Nummerierung der Bedienkanäle der Menge $R_2$
$R$	Menge der Bedienkanäle
$R_0$	Untermenge der Bedienkanäle
$R_1$	Untermenge der Bedienkanäle
$R_2$	Untermenge der Bedienkanäle
$T_0$	Kunden der Menge $R_0$
$T_1$	Kunden der Menge $R_1$
$T_2$	Kunden der Menge $R_2$
$T_1^*$	Untermenge von $T_1$
$T_2^*$	Untermenge von $T_2$
$\Psi$	Menge aller möglichen Kundenkombinationen
$\Pi$	Menge der Zustandswahrscheinlichkeiten
$\Omega_j$	Menge der Kombinationen, bei denen ein ankommender Kunde $j$ unmittelbar bedient werden kann
$\Phi_j$	Menge der Kombinationen, bei denen ein ankommender Kunde $j$ nicht unmittelbar bedient werden kann

## Wahrscheinlichkeiten

$p_g$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines gleichrangigen Zugfolgefalls
$p_i$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Kunden $i$
$p_V$	Verlustwahrscheinlichkeit
$p_V^*$	Verlustwahrscheinlichkeit des erhöhten Ankunftsstroms
$p_{VE}$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Einbruchverspätung
$p_{VGFK}$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Verspätung am Gesamtfahrstraßenknoten
$p_W$	Wartewahrscheinlichkeit
$\pi$	Zustandswahrscheinlichkeit
$\pi_0$	Leerwahrscheinlichkeit

**Anzahl-Variablen**

$g$	Anzahl an Kundentypen
$g_0$	Anzahl an Kundentypen der Menge $T_0$
$g_1$	Anzahl an Kundentypen der Menge $T_1^*$
$g_2$	Anzahl an Kundentypen der Menge $T_2^*$
$m$	Anzahl der möglichen Kundenkombinationen
$m_0$	Anzahl der möglichen Teilkombinationen
$m_{\max}$	maximale Anzahl der Kundenkombinationen
$n_j$	Anzahl Züge des Typs $j$
$n_{ges}$	Gesamtanzahl der Züge
$n_\varphi$	Zuganzahl in der Verkettung
$\tilde{n}_{h,i}$	Anzahl des Zuges $i$ eines Streckengleises $h$
$\tilde{n}_{h,ges}$	Gesamtzuganzahl eines Streckengleises $h$
$n_{RG}$	Anzahl der Rangstufen
$n_j(k_{RG})$	Zuganzahl bis einschließlich der Rangstufe $k_{RG}$
$n_{j\_}k_{RG}$	Zuganzahl der Rangstufe $k_{RG}$
$q$	Anzahl an einen Gesamtfahrstraßenknoten angrenzende Streckengleise
$s$	Anzahl der Bedienkanäle
$s_0$	Anzahl der Bedienkanäle der Menge $R_0$
$s_1$	Anzahl der Bedienkanäle der Menge $R_1$
$s_2$	Anzahl der Bedienkanäle der Menge $R_2$

**Erwartungswerte**

$EL_B$	Erwartungswert der Kunden in Bedienung
$EL_V$	Erwartungswert der Kunden im System
$EL_W$	Erwartungswert der wartenden Kunden
$ET_B$	Erwartungswert der Bedienzeit
$ET_V$	Erwartungswert der Verweilzeit im System
$ET_W$	Erwartungswert der Wartezeit
$ET_{WF}$	Erwartungswert der Wartezeit im Fahrplan
$ET_{WB}$	Erwartungswert der Wartezeit im Betrieb (außerplanmäßige Wartezeit)
$ET_{WB1}$	Erwartungswert der außerplanmäßigen Wartezeit ersten Grades
$ET_{WB,H}$	Erwartungswert der außerplanmäßigen Wartezeit höheren Grades
$ET_{WW}$	Erwartungswert der Wartezeit der Wartenden
$ET_{h,WF}$	Erwartungswert der planmäßigen Wartezeit eines Streckengleises $h$
$ET_{WF,red}$	Erwartungswert der reduzierten planmäßigen Wartezeit
$ET_W(k_{RG})$	Erwartungswert der Wartezeit bis einschließlich der Rangstufe $k_{RG}$
$ET_{W\_}k_{RG}$	Erwartungswert der Wartezeit der Rangstufe $k_{RG}$

**Zeitvariablen**

$b$	Bedienzeit
$\tilde{b}_h$	mittlere Bedienzeit eines Streckengleises $h$
$\hat{b}(j)$	mittlere Bedienzeit eines Kunden $j$
$\bar{t}_a$	mittlerer Ankunftsabstand
$t_d$	Dispositionszeit
$\bar{t}_p$	mittlere Pufferzeit
$t_{sperr,GFK}$	Einfahrtsperrzeit im Gesamtfahrstraßenknoten
$t_u$	Untersuchungszeitraum
$\bar{t}_{VE}$	mittlere Einbruchsverspätung der verspäteten Züge
$\bar{t}_{VGFK}$	mittlere Verspätung der verspäteten Züge am Gesamtfahrstraßenknoten
$z$	Mindestzugfolgezeit
$\bar{z}$	mittlere Mindestzugfolgezeit
$\bar{z}_g$	mittlere Mindestzugfolgezeit der gleichrangigen Zugfolgefälle
$\bar{z}_v$	mittlere Mindestzugfolgezeit der rangunterschiedlichen Zugfolgefälle

**Bezeichnungen aus der Bedientheorie**

$Var$	Varianz
$VA$	Variationskoeffizient der Ankunftszeiten
$VB$	Variationskoeffizient der Bedienzeiten
$\lambda$	Ankunftsrate
$\lambda_{opt}$	optimale Ankunftsrate
$\lambda_{max}$	maximale Ankunftsrate
$\lambda^*$	erhöhter Ankunftsstrom
$\rho$	Belegungsgrad
$\tilde{\rho}_{h,ges}$	Belegungsgrad eines Streckengleises $h$
$\mu$	Bedienrate

**Sonstige Bezeichnungen**

$B_1(j, \mathbf{c}_1)$	Hilfswert
$B_2(j, \mathbf{c}_2)$	Hilfswert
$f$	Verhältnissfaktor
$G, G_1, G_2$	Normalisierungskonstanten
$HRF$	Hochrechnungsfaktor
$\rho_{Rz}$	Anteil der Reisezüge
$Rg$	Rangziffer
$\varphi$	Verkettungszahl
$\alpha_j(\mathbf{u}_0)$	Hilfswert

## 13 Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Übersicht des deutschen Eisenbahnnetzes.....	14
Abb. 2: Gesamtfahrstraßenknoten Aachen Hbf .....	15
Abb. 3: Aufteilung eines Eisenbahnnetzes.....	16
Abb. 4: Prinzipielle Struktur eines Bedienungssystems .....	18
Abb. 5: Sperrzeit .....	22
Abb. 6: Sperrzeitentreppe und Mindestzugfolgezeit .....	22
Abb. 7: Zeitlücke im Gesamtfahrstraßenknoten.....	24
Abb. 8: Sperrzeit im Gesamtfahrstraßenknoten.....	25
Abb. 9: Ausschnitt Teilfahrstraßenknoten Aachen Hbf .....	26
Abb. 10: Modellierung eines Gesamtfahrstraßenknotens als Bediensystem .....	27
Abb. 11: Theoretische Leistungsfähigkeit .....	29
Abb. 12: Praktische Leistungsfähigkeit .....	30
Abb. 13: Belegungen eines Streckenabschnitts vor und nach der Verkettung.....	33
Abb. 14: Bahnhofskopf mit Fahrmöglichkeiten.....	34
Abb. 15: Belegungen im Gesamtfahrstraßenknoten vor und nach der Verkettung .....	35
Abb. 16: Fahrtenausschlussmatrix für einen Gesamtfahrstraßenknoten .....	38
Abb. 17: Referenzstrom und Störströme.....	39
Abb. 18: Zerlegung in drei Teilsysteme.....	58
Abb. 19: Abgewiesene Forderungen reihen sich wieder in den Ankunftsstrom ein .....	63
Abb. 20: Einbruchsverspätung $t_{VE}$ .....	69
Abb. 21: Folgeverspätung ersten Grades $t_{VF1}$ .....	70
Abb. 22: Folgeverspätung höheren Grades $t_{VFH}$ .....	70

---

Abb. 23: Die Verteilungsfunktion der Verspätungsverteilung.....	72
Abb. 24: Modellierung von Zugfahrten zur Berechnung der Streckenwartezeiten .....	79
Abb. 25: Benutzeroberfläche Simulationsprogramm.....	86
Abb. 26: Gesamtfahrstraßenknoten mit sieben Bedienkanälen .....	88
Abb. 27: Fahrten des Gesamtfahrstraßenknotens .....	88
Abb. 28: Verlustwahrscheinlichkeiten und Wartewahrscheinlichkeiten.....	92
Abb. 29: Abzweigstelle mit drei Kundentypen.....	99
Abb. 30: Erwartungswert der Wartezeiten am Beispiel einer Abzweigstelle .....	100
Abb. 31: Erwartungswert der Wartezeiten am Beispiel mit acht Kundentypen .....	101

## 14 Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Zulässige Wartewahrscheinlichkeiten bei Gleisgruppen.....	31
Tab. 2: Zulässiger Belegungsgrad nach UIC Leaflet 406 .....	33
Tab. 3: Anzahl Bedienstellen und Bedienkanäle von Gesamtfahrstraßenknoten .....	66
Tab. 4: Ankunftsrate und Bedienrate .....	89
Tab. 5: Kombinationen und Zustandswahrscheinlichkeiten bei Grenzleistung .....	90
Tab. 6: Vergleich von berechneten und simulierten Verlustwahrscheinlichkeiten.....	91
Tab. 7: Verlustwahrscheinlichkeiten nach DZIONG / ROBERTS und nach Zerlegung.....	98
Tab. 8: Ankunftsrate und Bedienrate / Abzweigstelle .....	99

## 15 Literaturverzeichnis

- [1] **Adler, G.:** Die Verkettung der Streckenbelegungen und der Belegungsgrad einer Gesamtstrecke.  
Dissertation, Dresden 1967
- [2] **Bendfeldt, J.:** Gestaltung und Bewertung von Fahrstraßenknoten.  
In: Der Eisenbahningenieur 50 (1999), H. 9, S. 36 – 39
- [3] **Bendfeldt, J.; Warninghoff, C.:** Infrastrukturbezogene Auswertung von Betriebs-simulationen in der Eisenbahnwissenschaft.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau 53 (2004), H. 6, S. 363 – 370
- [4] **Bendfeldt, J.:** Standardisierung in der Planung von Eisenbahnknoten.  
In: Der Eisenbahningenieur 56 (2005), H. 6, S. 18 – 28
- [5] **Breimeier, R.; Konanz, W.:** Die Wirtschaftliche Zugführung als Instrument der langfristigen Infrastrukturplanung.  
In: Schriftenreihe der DVWG, Reihe B, Band 178 (1994), S. 168 – 185
- [6] **Brill, P.; Green, L.:** Queues in which customers receive simultaneous service from a random number of servers.  
In: Management Science 30 (1984), H. 1, S. 51 – 68
- [7] **Bundesrechnungshof (Hrsg.):** Bemerkungen 2003 zur Haushalts- und Wirtschaftsführung des Bundes.  
Bonn 2003
- [8] **Butz, B.:** Angebotsoptimierung mit Moses.  
In: Der Nahverkehr (2002), H. 5, S. 54 – 58
- [9] **Conway, A.; Pinsky, E.; Tridandapani, S.:** Efficient decomposition methods for the analysis of multi-facility blocking models.  
In: Journal of the Association for Computing Machinery 41 (1994), H. 4, S. 648 – 675
- [10] **Deutsche Bahn, Geschäftsbereich Netz (Hrsg.):** Handbuch für betriebliche Infrastrukturplaner.  
Frankfurt a. M. 1999
- [11] **Deutsche Bahn, Geschäftsbereich Netz (Hrsg.):** Fahrwegkapazität.  
Frankfurt a. M. 2002
- [12] **Dziong, Z.; Roberts, J.:** Congestion probabilities in a circuit-switched integrated network.  
In: Performance Evaluation (1987), H. 7, S. 267 – 284
- [13] **Europäische Gemeinschaft (Hrsg.):** Richtlinie 2001/14/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 26. Februar 2001.



- 
- [14] **Federgruen, A.; Green, L.:** An M/G/c queue in which the number of servers required is random.  
In: Journal of Applied Probability 21 (1984), S. 583 – 601
- [15] **Fengler, W.; Klahn, V.; Haslinger, A.:** Kennzahlen zur Bewertung von Infrastruktur und Betrieb.  
In: Der Eisenbahningenieur 54 (2003), H. 10, S. 56 – 61
- [16] **Ferchland, C.; Körner, T.:** Analytische Verfahren der Eisenbahnbetriebswissenschaft.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau 53 (2004), H. 7/8, S. 499 – 505
- [17] **Fischer, K.; Hertel, G.:** Bedienungsprozesse im Transportwesen.  
Transpress, Berlin 1990
- [18] **Gimpelson, L.:** Analysis of mixtures of wide- and narrow- band traffic.  
In: IEEE Transactions on communication technology 13 (1965), H. 3, S. 258 – 266
- [19] **Green, L.:** A queuing system in which customers require a random number of servers.  
In: Operations Research 28 (1980), S. 1335 – 1346
- [20] **Gröger, T.; Franke, B.:** Mikroskopische Simulation der Fahrplanerstellung und Betriebsabwicklung mit BABS I.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau (2006), H. 12, S. 851 – 857
- [21] **Gudehus, T.:** Grenzleistung bei absoluter Vorfahrt.  
In: Zeitschrift für Operations Research (1976), H. 20, S. B127 – B160
- [22] **Happel, O.:** Sperrzeiten als Grundlage für die Fahrplankonstruktion.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau (1959), H. 2, S. 79 – 90
- [23] **Heister, G.:** Das Verspätungsniveau zweigleisiger Eisenbahnstrecken.  
Wissenschaftliche Arbeiten des Instituts für Verkehrswesen, Eisenbahnbau- und betrieb der TU Hannover, H. 11, 1978
- [24] **Hermann, U.:** Untersuchungen zur Verspätungsentwicklung von Fernreisezügen auf der Datengrundlage der Rechnergestützten Zugüberwachung Frankfurt a. M.  
Dissertation, Darmstadt 1996
- [25] **Kahlmeyer, A.; Kerwien, D.; Schröder, M.; Wolf, J.:** Ermittlung der Leistungsfähigkeit einer Werkbahn mit Open-Track.  
In: Güterbahnen (2003), H. 2, S. 43 – 46
- [26] **Kamoun, F.; Kleinrock, L.:** Analysis of shared finite storage in a computer network node environment under general traffic conditions.  
In: IEEE Transactions on Communications 28 (1980), H. 7, S. 992 – 1003

- [27] **Kaufmann, J.:** Blocking in a shared resource environment.  
In: IEEE Transactions on Communications 29 (1981), H. 10, S. 1474 – 1481
- [28] **Kelly, F.:** Blocking probabilities in large circuit-switched networks.  
In: Advances in Applied Probability 18 (1986), S. 473 – 505
- [29] **Kim, S.:** M/M/s queueing system where customers demand multiple server use.  
Dissertation, Dallas 1979
- [30] **Little, J.:** A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$ .  
In: Operations Research (1961), H. 9, S. 383 – 387
- [31] **Melikov, A.:** Computation and optimization methods for multiresource queues.  
In: Cybernetics and System Analysis 32 (1996), H. 6, S. 821 – 836
- [32] **Mitra, D.; Weinberger P.:** Probabilistic models of database locking: solutions, computational algorithms, and asymptotics.  
In: Journal of the Association for Computer Machinery 31 (1984), H. 4, S. 855 – 878
- [33] **Nießen, N.; Wendler, E.:** Grenzleistung von Gesamtfahrstraßenknoten.  
In: Proc. 21. Verkehrswissenschaftliche Tage, Dresden (2007), Session 4
- [34] **Oetting, A., Nießen, N.:** Eisenbahnbetriebliches Werkzeug für die mittel und langfristige Infrastrukturplanung.  
In: Proc. 19. Verkehrswissenschaftliche Tage, Dresden (2003), Session 4e
- [35] **Oetting, A.:** Analytische Berechnung der planmäßigen Wartezeiten im Gesamtfahrstraßenknoten.  
In: Proc. 20. Verkehrswissenschaftliche Tage, Dresden (2005), Session 4b
- [36] **Omahan, K.:** Analytic models of multiple resource systems.  
Dissertation, Chicago 1973
- [37] **Omahan, K.; Marathe, V.:** A queueing model for a multiprocessor system with partitioned memory.  
Tech. Rep. 132, Department of Computer Science, Purdue University, 1975
- [38] **Omahan, K.:** Capacity bounds for multiresource queues.  
In: Journal of the Association for Computing Machinery 24 (1977), H. 4, S. 646 – 663
- [39] **Pachl, J.:** Systemtechnik des Schienenverkehrs.  
Teubner Verlag, Stuttgart 2002
- [40] **Pinsky, E.; Conway, A.:** Computational algorithms for blocking probabilities in circuit-switched networks.  
In: Annals of Operations Research 35 (1992); S. 31 – 41

- [41] **Potthoff, G.:** Verkehrsströmungslehre, Band 1: Zugfolge auf Strecken und Bahnhöfen.  
Transpress, Berlin 1962
- [42] **Reinarz, W.; Drechsler, M.; Klemenz, M.:** Erst simulieren, dann fahren – Köln optimiert Fahrpläne.  
In: Der Nahverkehr (2006); H. 6, S. 39 – 44
- [43] **Schneider, W.; Nießen, N.; Oetting, A.:** MOSES/WIZUG: Strategic modelling and simulation tool for rail freight transportation.  
In: Proc. of the European Transport Conference, Straßbourg (2003), Session 11
- [44] **Schwanhäüßer, W.:** Die Bemessung der Pufferzeiten im Fahrplangefüge der Eisenbahn.  
Veröffentlichung des Verkehrswissenschaftlichen Instituts der RWTH Aachen (1974) , H. 20
- [45] **Schwanhäüßer, W.:** Der Fahrstraßenknoten als Wartesystem.  
In: Festschrift, Veröffentlichung des Verkehrswissenschaftlichen Instituts der RWTH Aachen (1975), H. 21, S. 164 – 175
- [46] **Schwanhäüßer, W.:** Die Ermittlung der Leistungsfähigkeit von großen Fahrstraßenknoten und von Teilen des Eisenbahnnetzes.  
In: Archiv für Eisenbahntechnik 33 (1978), S. 7 – 18
- [47] **Schwanhäüßer, W.; Schultze, K.:** Ermittlung von Qualitätsmaßstäben für die Berechnung der Leistungsfähigkeit eines Streckenabschnittes und Entwicklung eines Rechenverfahrens zur Ermittlung von Endverspätungen.  
Forschungsarbeit für die Deutsche Bundesbahn, Aachen 1982
- [48] **Schwanhäüßer, W.; Brünger, O.; Schultze K.:** Programmfamilie SLS - Benutzerhandbuch Teil B: STRELE  
Version 4.98, Aachen 2001
- [49] **Uhlmann, M.; Mutschink, K.:** Bemessung komplexer Eisenbahninfrastruktur – Die konstruktive Methode.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau 53 (2004), H. 7/8, S. 506 – 514
- [50] **UIC (Hrsg.):** Capacity.  
UIC Code 406, 1st edition, 2004
- [51] **Vakhtel, S.:** Rechnerunterstützte analytische Ermittlung der Kapazität von Eisenbahnnetzen.  
Veröffentlichung des Verkehrswissenschaftlichen Instituts der RWTH Aachen (2002), H. 59

- [52] **Wakob, H.:** Ableitung eines generellen Wartemodells zur Ermittlung der planmäßigen Wartezeiten im Eisenbahnbetrieb unter besonderer Berücksichtigung der Aspekte der Leistungsfähigkeit und der Anlagenbelastung.  
Veröffentlichung des Verkehrswissenschaftlichen Instituts der RWTH Aachen (1985), H. 36
- [53] **Waringhoff, C.; Ferchland, C.:** Nutzung von Simulationen zur Unterstützung der betrieblichen Infrastrukturplanung.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau 53 (2004), H. 7/8, S. 490 – 498
- [54] **Wendler, E.:** Analytische Berechnung der planmäßigen Wartezeiten bei asynchroner Fahrplankonstruktion.  
Veröffentlichung des Verkehrswissenschaftlichen Instituts der RWTH Aachen (1999), H. 55
- [55] **Wendler, E.:** Bemessungsmethoden für große Eisenbahnknoten.  
In: Eisenbahntechnische Rundschau 51 (2002), H. 7/8, S. 418 – 424
- [56] **Wendler, E.; Naehrig, M.:** Statistische Auswertung von Verspätungsdaten.  
In: Eisenbahningenieurkalender (2004), S. 321 – 331
- [57] **Wendler, E. ; Nießen, N.:** Infrastrukturmodellierung für die strategische Netzplanung.  
In: Proc. 20. Verkehrswissenschaftliche Tage, Dresden (2005), Session 4b
- [58] **Wendler, E.:** On waiting times of scheduled train paths in non-cyclic timetables.  
In: Proc. of the 1st International Seminar on Railway Operations Modelling and Analysis, Delft (2005)
- [59] **Wendler, E.:** The scheduled waiting time on railway lines.  
In: Transportation Research 41 (2007), Part B, S. 148 – 158
- [60] **Whitt, W.:** Blocking when service is required from several facilities simultaneously.  
In: American Telephone and Telegraph Technical Journal 64 (1985), H. 8, S. 1807 – 1856



## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Nils Nießen

geboren am 16.11.1974  
in Aachen

### Schulausbildung:

1985 – 1994 Einhard Gymnasium in Aachen

### Hochschulausbildung:

1994 – 2002 Studium an der RWTH Aachen

09/2001 Abschluss Dipl.-Ing. Bauingenieurwesen  
Vertieferrichtung „Verkehrswesen und Raumplanung“

06/2002 Abschluss Magister Artium (M.A.)  
Wirtschaftsgeographie und Bautechnik

### Beruflicher Werdegang:

04/1999 – 06/2001 studentische Hilfskraft am Verkehrswissenschaftlichen  
Institut der RWTH Aachen

10/2001 – 06/2002 wissenschaftliche Hilfskraft am Verkehrswissenschaftlichen  
Institut der RWTH Aachen

07/2002 – 06/2007 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Verkehrswissenschaftlichen  
Institut der RWTH Aachen

seit 07/2007 Projektingenieur bei der Firma HaCon, Hannover